

## 解析基礎 第10回問題 解答

1. 置換積分法により次の積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$x^2 + 1 = t$  とおくと、両辺微分して

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に  $\frac{dx}{2x}$  をかけて

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

これらで置き換えをして

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

$$(2) \int x(1-x)^4 dx$$

$t = 1 - x$  とおき両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

となるが、この両辺に  $-dx$  を掛けると

$$dx = -dt \quad (**)$$

という等式が得られる。この(\*\*)から  $dx$  を  $-dt$  に置き換えればよいことになる。  $x = 1 - t$  に注意して

$$\begin{aligned} \int x(1-x)^4 dx &= \int xt^4(-dt) = \int (1-t)t^4(-dt) \\ &= \int (t-1)t^4 dt = \int t^5 dt - \int t^4 dt \\ &= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{6}(1-x)^6 - \frac{1}{5}(1-x)^5 \end{aligned}$$

$$(3) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$\sin x = t$  とおくと  $\cos x dx = dt$  だから

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x$$

$$(4) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad (\cos x = t \text{ とおけ})$$

$\cos x = t$  とおく。両辺微分して  $-\sin x = \frac{dt}{dx}$

$$\sin x dx = -dt$$

これらで置き換えをして

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| = -\log|\cos x|$$

2. 部分積分法により次の積分を計算せよ。

$$(1) \int xe^{2x} dx$$

$f'(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = x$  とみて部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

を使う。

まず  $f'(x) = e^{2x}$  であることから

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

となる。次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned} \int xe^{2x} dx &= \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)x - \int \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)(x)' dx \\ &= \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}. \end{aligned}$$

短く言うと

$$\begin{aligned} \int xe^{2x} dx &= \int x \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = x \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int (x)' \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx \\ &= \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \end{aligned}$$

としてもよい.

$$(2) \int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx \\ = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \cdots (\star)$$

ここで

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - e^x$$

だから

$$(\star) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$$

$$(3) \int x \sin x dx$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

だから

$$(-\cos x)' = \sin x$$

であることがわかる. 次に部分積分法を使って

$$\int x \sin x dx = \int x (-\cos x)' dx \\ = x (-\cos x) - \int (x)' (-\cos x) dx \\ = -x \cos x + \sin x.$$

$$(4) \int e^x \sin x dx, (\text{部分積分を2回使う})$$

$$\int e^x \sin x dx = \int e^x (-\cos x)' dx \\ = e^x (-\cos x) - \int (e^x)' (-\cos x) dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \cdots (\star)$$

一方

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= \int e^x (\sin x)' \, dx \\ &= e^x (\sin x) - \int (e^x)' (\sin x) \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx\end{aligned}$$

これを (\*) に代入して

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

整理して

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

3. (1) 次の式を部分分数に分解せよ.

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}$$

分母を因数分解すると

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

だからこの関数は

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \quad (A, B \text{ は定数})$$

の形に変形される. これを部分分数分解という. この等式が  $x$  の恒等式になるように定数  $A, B$  の値を決めよう. 右辺を通分して足し算すると

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} &= \frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

だから分子どうし比較して

$$x+8 = (A+B)x + 3A - 2B$$

であればよい.

$$x \text{ の係数どうしを比較して } A+B=1$$

$$\text{定数項どうし比較して } 3A-2B=8$$

この連立方程式を解くと  $A=2, B=-1$  だから

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$$

(2)  $\int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx$  を計算せよ.

(1) により

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= 2 \log|x-2| - \log|x+3|\end{aligned}$$

### 3. 追加

(1)  $\int x \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x)$

(2)  $\int x e^{3x} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x}$

(3)  $\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3x+2}$

(4)  $\int \frac{x}{\sqrt{3x+2}} dx = \frac{2}{27} (-4 + 3x) \sqrt{3x+2}$

(5)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$  スライドを見よ

(6)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1}$