環境基礎解析学 第10回問題 解答

1. (1) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるというのは

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となる事である．ただし $\frac{d}{dx}F(x)$ は $F'(x)$ と同じで $F(x)$ の導関数を表す記号である．

(式のみ書くのは不可。)

(2) $f(x)$ の不定積分とは

$$F(x) + C$$

のことである．ただし, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり, C は任意の定数である．この定数 C を**積分定数**という．

(式のみ書くのは不可。)

$f(x)$ の不定積分を記号

$$\int f(x)dx$$

で表す．したがって

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である．しばらく積分定数は省略してもよいことにする．

2. (1) C を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

だから

$$\int 0\,dx = C$$

(2) $\frac{d}{dx}2x = 2$

だから

$$\int 2\,dx = 2x + C$$

(3) $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$

だから両辺を 2 で割って

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$$

だから

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

(4) a を 0 でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

だから 両辺を a で割って

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = x^{a-1}$$

ここで $a-1=\alpha$ とおくと $a=\alpha+1$ となるから.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}$$

だから $\alpha \neq 1$ のとき

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

(5) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

だから

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

である.

[別解] $\quad \dfrac{d}{dx}\sin x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

だから $\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right.$ を x でおきかえて, また x を $x-\dfrac{\pi}{2}$ でおきかえて$\Big)$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

したがって

$$\int \sin x\,dx=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

でもよい。というかこっちのほうがよいと思う。

(6) $\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

だから

$$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$$

だから

$$\int \sin x\,dx=-\cos x$$

である．または

$$\frac{d}{dx}\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

だから $\left(\ x+\dfrac{\pi}{2}\right.$ を x でおきかえて, また x を $\left.x-\dfrac{\pi}{2}\right.$ でおきかえて$\Big)$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

したがって

$$\int \cos x\,dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

でもよい。というかこっちがよい。

(7) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ である．$\alpha=\dfrac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

(8) $x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

(9) $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ であるが (4) は使えない.

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

だから不定積分の定義により

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C.$$

(10) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

3. 積分定数 C は省略する.

(1) $\displaystyle\int (x^2+3x)\,dx = \int x^2\,dx + 3\int x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$

(2) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)^2\,dx = \int (x + 2\sqrt{x} + 1)\,dx$

$$= \int x\,dx + 2\int \sqrt{x}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$$

(3) $\displaystyle\int (9x^2+2e^x)dx = 9\int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = 3x^3 + 2e^x.$

4. (1) $\displaystyle\int (2x-3)^5\,dx$

$$2x - 3 = t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}dt$ に置き換えればよいことが分かる．このおきかえにより

$$\int (2x-3)^5\,dx = \int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int t^5\,dt = \frac{1}{12}t^6$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{12}(2x-3)^6.$$

(2) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}t^6\right) = 2\frac{1}{12}6t^5 = t^5 = (2x-3)^5$$

これは (1) の検算である。

(3) $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,dx$

(1) と同じ変換で

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．これらにより $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int \cos(2x-3)\,dx = \int \cos t\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\sin t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-3)$$

(4) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin(2x-3)\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin t\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cos t = \cos t = \cos(2x-$
$3)$

これは (3) の検算である。

(5) $\int e^{2x-3}\,dx$

(1) と同じ変換で $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3}\,dx = \int e^t\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}e^t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

(6) $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x-3}\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^t\right) = 2\cdot\frac{1}{2}e^t = e^t = e^{2x-3}$$

これは (5) の検算である。

5. (1) $\int\sqrt{2x-3}\,dx$ を計算しよう. $2x-3=t$ とおくと $\frac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\frac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int\sqrt{2x-3}\,dx = \int\sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right)$

$2x-3=t$ とおいて合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\times\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\times 2$$

$$= t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

これは (1) の検算である。

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ を計算しよう．$2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-3}\right)$

$2x-3=t$ とおいて合成関数の微分法を使う。

$$\frac{d}{dx}\left((2x-3)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\times\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

これは (3) の検算である。

6. (1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算せよ．($x^2+1=t$ とおく)

$t=x^2+1$ とおき, この両辺を x で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる．このことから dx を $\dfrac{1}{2x}dt$ に置き換えればよいことになる．（ これは定理 6.3 (6.8) の置き換えと全く同じ置き換えである．）

この置き換えにより

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int x\sqrt{t}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \sqrt{t}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ. ($x^2+1=t$ とおく)

(1) と同じ置き換えにより

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} =$ $(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}$.

7. (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}\,dx$

$$2x+1=t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx=\frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t|$$

$t=2x+1$ だから

$$= \frac{1}{2}\log|2x+1|.$$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

$t=1-x$ とおき両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx}=-1$$

となるが, この両辺に $-dx$ を掛けると

$$dx=-dt \qquad (**)$$

という等式が得られる．この (**) から dx を $-dt$ に置き換えればよいことになる．$x = 1-t$ に注意して

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= \int x\sqrt{t}\,(-dt) = \int (1-t)\sqrt{t}\,(-dt) \\ &= \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt - \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt - \int t^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{2}{5}\,t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\,(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$

$$1+\sin x = t$$

とおき置換積分法を使う．両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に dx をかけて

$$\cos x\,dx = dt$$

だから $1+\sin x$ を t に, $\cos x\,dx$ を dt に置き換えなければならないので

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{1+\sin x}.$$