

環境基礎解析学 I 第 8 回 解答

2.1 (1) $f^{(n)}(x) = e^x$ だから $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \cdots (\star)$, ($n = 1, 2, \dots$)

(2) 関数 $f(x)$ の n 次のマクローリン近似多項式 $P_n(x)$ は

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots (\star\star)$$

であるが, (\star) を代入して

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2.2

(1) $f(x) = \sin x$ とするときの 9 次までのマクローリン近似多項式 $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, 9$ を計算せよ. また, Grapes を用いてグラフを書いてみよ. (ピアサポーターに確認してもらうこと。)

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

だから

$$f'(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$f''(0) = \sin \frac{2\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(3)}(0) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$f^{(4)}(0) = \sin \frac{4\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = \sin \frac{5\pi}{2} = 1,$$

$$f^{(6)}(0) = \sin \frac{6\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(7)}(0) = \sin \frac{7\pi}{2} = -1,$$

$$f^{(8)}(0) = \sin \frac{8\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(9)}(0) = \sin \frac{9\pi}{2} = 1,$$

これらを (**) に代入して

$$P_0(x) = 0,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = x,$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},$$

$$P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},$$

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

(2) $f(x) = \cos x$ とするときの 8 次までのマクローリン近似多項式 $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, 8$ を計算せよ. また, Grapes を用いてグラフを書いてみよ. (ピアサポーターに確認してもらおう)

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

だから,

$$f'(0) = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$f''(0) = \cos \frac{2\pi}{2} = -1,$$

$$f^{(3)}(0) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = \cos \frac{4\pi}{2} = 1,$$

$$f^{(5)}(0) = \cos \frac{5\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(6)}(0) = \cos \frac{6\pi}{2} = -1,$$

$$f^{(7)}(0) = \cos \frac{7\pi}{2} = 0,$$

$$f^{(8)}(0) = \cos \frac{8\pi}{2} = 1,$$

したがってこれらを (**) に代入して

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 1,$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$

$$P_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$

$$P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

2.3 Taylor の定理を利用して次の事確かめよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$\sin x$ にマクローリンの定理を $n = 3$ として適用すると, ある数 $0 < \theta < 1$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x) x^5}{5!}$$

がわかる. これを左辺に代入すると

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x) x^5}{5!} - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{\sin(\theta x) x^2}{5!}$$

$|\sin(\theta x)| \leq 1$ に注意すると $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin(\theta x) x^2}{5!} \rightarrow 0$ だから

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = 0.$$

e^x にマクローリンの定理を $n = 4$ として適用すると、ある数 $0 < \theta < 1$ があって

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^{\theta x} x^5}{5!}$$

すべての項は > 0 だから

$$> \frac{x^4}{4!}$$

がわかるから

$$0 < \frac{x^3}{e^x} < \frac{x^3}{\frac{x^4}{4!}} = \frac{4!}{x}$$

である。ところで $x \rightarrow +\infty$ とすると最後の項は $\rightarrow 0$ であるから、はさみうちの原理により $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = 0$ がわかる。

これは $x \rightarrow \infty$ としたとき e^x は x^3 よりも速く増加することを意味する。

じつは同じ方法で $\lim_{x \rightarrow \infty} x^N e^{-x} = 0$, ($N = 1, 2, \dots$) もわかる。