

環境基礎解析学I 第7回 解答

問題 1. 次の関数 $f(x)$ の増減・凹凸を調べ、極値および変曲点を求めよ。また、グラフの概形を描け。

$$(1) f(x) = x^3 - 3x^2,$$

[増減を調べる]

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x - 2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x - 2) < 0$, だからここで狭義単調減少

$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x - 2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[凹凸を調べる]

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。また

$x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

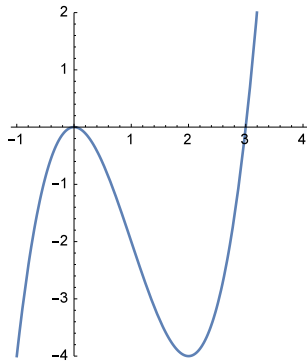
$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x	0	1	2
$f'(x)$	+ 0 -	- 0 +	- 0 +
$f''(x)$	- - -	0 + +	+ + +
f	↗ 0 ↘	↘ -2 ↘	↘ -4 ↗

となる。ここで ↗ は単調増加かつ上に凸, ↘ は単調減少かつ上に凸, ↘ は単調減少かつ下に凸, ↗ は単調増加かつ下に凸 を表す。

だから $x = 0$ で極大値 0 をとり $x = 2$ で極小値 -4 をとる。変曲点は $(1, -2)$ 。



(2) $f(x) = xe^{-x}$, (2) $f(x) = xe^{-x}$ とする。

$(e^{ax})' = ae^{ax}$, (a は定数) に注意!

[増減を調べる] 積の微分法により

$$f'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

である。だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。またすべての x に対して $e^{-x} > 0$ だから

$x < 1$ のとき $1 - x > 0$ だから $f'(x) > 0$, だからここで狭義単調増加

$1 < x$ のとき $1 - x < 0$ だから $f'(x) < 0$, だからここで狭義単調減少

[凹凸を調べる]

$$f''(x) = ((1-x)e^{-x})' = (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のとき。また

$x < 2$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

$x > 2$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[極限を調べる]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = +0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = +0, \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ 後期に説明します}$$

に注意すると

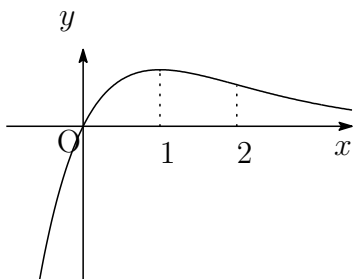
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x e^{-x} = (-\infty)\infty = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +0.$$

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

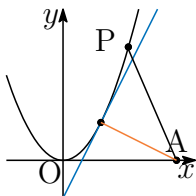
x	$-\infty$	0	1	2	∞	
$f'(x)$		+	+	0	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	e^{-1}	\searrow
					極大	変曲点
					$2e^{-2}$	0

だから $x = 1$ で極大値 e^{-1} をとり, 変曲点は $(2, 2e^{-2})$.



問題.2 $y = x^2$ の上の点を P とする。

(1) P と点 $A(3, 0)$ の距離が最小になるような P を求めよ。



$P(x, x^2)$, $A(3, 0)$ とするとき

$$AP^2 = (x - 3)^2 + (x^2 - 0)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9 \quad (= f(x) \text{ とおく})$$

を最小にする x を求めればよい。

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = (x - 1)(4x^2 + 4x + 6) = (x - 1)((2x + 1)^2 + 5)$$

だから $x = 1$ で極小値 $f(1) = 5$ をとる。だから距離が最小になる P は $(1, 1)$ 。

(2) (1) で求めた P における接線と AP が直交することを確認めよ。

$(1, 1)$ での接線の傾きは $f'(1) = 2$ 。

AP の傾きは $-\frac{1}{2}$

だから直交する。