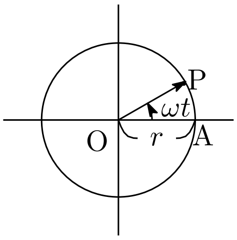
環境基礎解析学I　第6回　解答

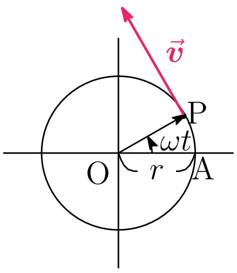
1　点 P は原点中心半径 r の円周上を, 時刻 0 で点 A$(r, 0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している.

(1) このとき, 時刻 t における P の座標を t を用いて表せ.



角速度が ω だから P は時刻 t には半径 r の円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る. だから $(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ である.

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を求めよ。



速度ベクトルの成分表示は P の座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{v}(t) = ((r\cos\omega t)', (r\sin\omega t)') = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$$

これは方向は接線方向で大きさは $r\omega$ のベクトルである。

(3) $\vec{v}(t)$ を図中に書き込め。

2.　次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = \sin(3x-2)$ のとき $3x-2=t$ とおくと $y=\sin(3x-2)$ は $y=\sin t$ と $t=3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である. 合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x-2).$

(2) $y=\cos(3x-2)$ のとき, $3x-2=t$ とおくと $y=\cos(3x-2)$ は $y=\cos t$ と $t=3x-2$ の合成関数となる.

$t=3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx}=3$,

$y=\cos t$ より $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3(-\sin t)=-3\sin(3x-2).$$

(3) $y=\tan(3x-2)$ のとき, $3x-2=t$ とおくと

$y=\tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

である. あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{3}{\cos^2(3x-2)}.$$

(4) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x+1}.$$

(5) $y=\log(\cos x)$ のとき $t=\cos x$ とおく.

関数 $y=\log(\cos x)$ は関数 $t=\cos x$, $y=\log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=-\sin x\times\frac{1}{t}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

となる.

(6) $y=e^{2x}\cos 3x$, 積の微分法により

$(e^{2x}\cos 3x)' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2\,e^{2x}\ \cos 3x - 3\,e^{2x}\ \sin 3x.$

(7) $y = x\cos x$ のとき積の微分法により

$y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

(8) $y = \cos^3(3x-2)$ のとき,

$3x-2 = t$, $\cos(3x-2) = s$ とおくと $y = s^3$, $s = \cos t$ だから $y = \cos^3(3x-2)$ は

$y = s^3,\ s = \cos t,\quad t = 3x-2,$

の合成関数である.

$\dfrac{dy}{ds} = 3s^2,\quad \dfrac{ds}{dt} = -\sin t,\quad \dfrac{dt}{dx} = 3$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{ds}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{dx} = 3s^2 \times (-\sin t) \times 3 = -9\sin(3x-2)\cos^2(3x-2).$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & 3x-2 & & \cos t & & s^3 \\ \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dt}{dx} & \times & \dfrac{ds}{dt} & \times & \dfrac{dy}{ds} \end{array}$$

(9) $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ のとき,

$3x-2 = t$, $(3x-2)^3 = s$ とおくと $y = \cos s$, $s = t^3$ だから $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ は

$y = \cos s,\ s = t^3,\quad t = 3x-2,$

の合成関数である.

$\dfrac{dy}{ds} = -\sin s,\quad \dfrac{ds}{dt} = 3t^2,\quad \dfrac{dt}{dx} = 3$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{ds}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{dx} = -\sin s \times 3t^2 \times 3 = -9\sin\left((3x-2)^3\right)\ (3x-2)^2.$

(10) $y = e^{\sin x}$ のとき $t = \sin x$ とおく.

関数 $y=e^{\sin x}$ は関数 $t=\sin x,\ y=e^t$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

$\dfrac{dy}{dt}=e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt}=\cos x\times e^t=e^{\sin x}\cos x$

となる.

(11) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$
\begin{aligned}
y'&=\frac{(1+\cos x)'(1-\sin x)-(1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}\\
&=\frac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\\
&=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}
\end{aligned}
$$

(12) $y=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right),\ \ (a>0$ は定数$)$

$t=\dfrac{x}{a}$ とおく.

関数 $y=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ は関数 $y=\frac{1}{a}\tan^{-1}t,\ t=\frac{x}{a}$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{a}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+t^2}$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\dfrac{1}{a^2+x^2}$

となる.

(13) $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+a^2}},\ \ (a>0$ は定数$)$

$y'=-\dfrac{1}{a^2+x^2-x\sqrt{a^2+x^2}}$

(14) $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ のとき $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおく.

関数 $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ は関数 $y=\log|t|$, $t=x+\sqrt{x^2+1}$

の合成関数である. 第 5 回 (9) を使って

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

だから,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

(15) $y=x\sin x\cos 2x$ 3 つの項の積の場合でも積の微分法が使えるので

$(x\sin x\cos 2x)'=(x)'\sin x\cos 2x+x(\sin x)'\cos 2x+x\sin x(\cos 2x)'$

$=\sin x\cos 2x+x\cos x\cos 2x+x\sin x(-2\sin 2x)=\sin x\cos 2x+x\cos x\cos 2x-2x\sin x\sin 2x$.

(16) $y=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ のとき $t=\frac{1}{1+x}$ とおく.

関数 $x\mapsto y$ は関数 $x\mapsto t$, $t\mapsto y$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

であり, また $y=\arctan t$ だから

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{(1+x)^2}\times\frac{1}{1+t^2}=\frac{-1}{(1+x)^2(1+\frac{1}{(1+x)^2})}=\frac{-1}{x^2+2x+2}$$

となる.