環境基礎解析学I 第5回　解答

1 $x > 0$ とする。 指数法則を使うと $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$ だから $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ である。同様にして次の表の空欄に適する式を書き入れよ。

α	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
e^{α}	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1	$\sqrt{x}$	x

2 次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

$y' = (x^3 - 2x^2 + 5x + 6)' = (x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' + (6)' = 3x^2 - 4x + 5$

(2) $y = 3x^8 - 5x^3 + 1.$

$y' = 24x^7 - 15x^2.$

(3) $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 3(\sqrt{x})' - 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(4) $y = x^2 + x - 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

$$y' = \left(x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (x^2)' + (x)' - (1)' - \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$
$$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

3. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = (2x-1)^{10}$ のとき $t = 2x - 1$ とおく.

関数 $y = (2x-1)^{10}$ は関数 $y = t^{10}$, $t = 2x - 1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{10}) = 10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x-1) = 2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 10\,t^9 \times 2 = 20(2x-1)^9$$

である.

(2) $y=\dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. $y=\dfrac{1}{2x-1}$ は $y=\dfrac{1}{t}$, $t=2x-1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}\qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times 2=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=\frac{(1)'\times(2x-1)-1\times(2x-1)'}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{0\times(2x-1)-1\times 2}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}.$$

(3) $y=\sqrt{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(4) $y=x^3+2x^2+1$ のとき,

$$y'=(x^3+2x^2+1)'=(x^3)'+2(x^2)'+(1)'=3x^2+4x.$$

(5) $y=(x^3+2x^2+1)^8$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=(x^3+2x^2+1)^8$ は関数 $y=t^8$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3+2x^2+1)=3x^2+4x\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^8)=8\,t^7$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=8\,t^7\times(3x^2+4x)=8(3x^2+4x)(x^3+2x^2+1)^7$$
である．

(6) $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ のとき, $t=x^3+2x^2+1$ とおく．

関数 $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3+2x^2+1)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right)=-t^{-2}$$
である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-t^{-2})\times(3x^2+4x)=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}$$
である．

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^3+2x^2+1}\right)'=\frac{(1)'\times(x^3+2x^2+1)-1\times(x^3+2x^2+1)'}{(x^3+2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{0\times(x^3+2x^2+1)-1\times(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}.$$

(7) $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく．

関数 $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t^8}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3+2x^2+1)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-8}\right)=-8t^{-9}$$
である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-8t^{-9})\times(3x^2+4x)=\frac{-8(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^9}$$
である．

(8) $\sqrt{x^3+2x^2+1}$

$y=\sqrt{x^3+2x^2+1}$, $t=x^3+2x^2+1$ とおく．関数 $x\mapsto y$ は関数 $x\mapsto t$, $t\mapsto y$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx}=3x^2+4x$$

であり, また $y = \sqrt{t}$ だから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = (3x^2 + 4x) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$$

となる.

(9) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ のとき, $t = x^2 + 1$ とおく. 関数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$$

でありまた (9) により

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

となる.

(10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(11) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ のとき, $t = x^2 + 1$ とおくと, 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ は関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t = x^2 + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$$

であり, また (10) より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}} \times (2x) = \frac{-(2x)}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる.

(12) 商の微分法により

$$\left(\frac{x}{x^4+1}\right)' = \frac{(x)'(x^4+1)-(x)(x^4+1)'}{(x^4+1)^2} = \frac{(x^4+1)-(x)(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{-3x^4+1}{(x^4+1)^2}.$$

(13) $y = \dfrac{x}{x-1}$

$$y' = \frac{(x)'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(14) 商の微分法により

$$\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

(15) $(\sqrt{x}\,(x^2-\dfrac{1}{x}))' = (x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})' = \dfrac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}.$

(16) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

商の微分法により

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{x^2+a^2}-x(\sqrt{x^2+a^2})'}{x^2+a^2}$$

(10) の結果より

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} = \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(17) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$

商の微分法により

$$\left(\frac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \frac{x'(x-\sqrt{x^2+a^2})-x(x-\sqrt{x^2+a^2})'}{(x-\sqrt{x^2+a^2})^2}$$

(10) の結果より

$$= \frac{(x-\sqrt{x^2+a^2})-x(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})}{(x-\sqrt{x^2+a^2})^2} = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{-a^2}{(x-\sqrt{x^2+a^2})^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

4 (追加). 次の関数の導関数を計算せよ。a は正の定数とする。

(1) $y = e^{ax}$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = e^{ax}$ は関数 $y = e^t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\frac{dt}{dx} = a,\qquad$ また (1) より $\frac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times a = a\,e^{ax}$

となる.

(2) $y = \log(ax)$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = \log(ax)$ は関数 $y = \log t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax) = a,\qquad$ また (2) より $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\log t = \frac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times a = \frac{1}{x}$

となる.

$(\log(ax))' = (\log x)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log(ax) = \log a + \log x$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(3) 積の微分法と (3) により

$(xe^{3x})' = (x)'e^{3x} + x(e^{3x})' = e^{3x} + x(3e^{3x}) = (1+3x)\,e^{3x}.$

(4) $y = \log(x^2+1)$, $t = x^2+1$ とおく.

関数 $y = \log(x^2+1)$ は関数 $t = x^2+1$, $y = \log t$ の合成関数である.

$\frac{dt}{dx} = 2x$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = 2x \times \frac{1}{t} = \frac{2x}{x^2+1}$$

となる．