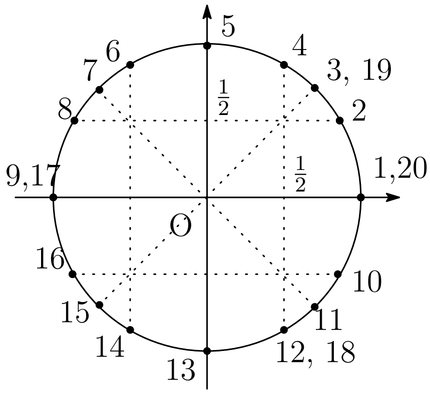
環境基礎解析学 I 演習問題 No. 4 解答

問題 3.



(16 から 20 は無視してください。)

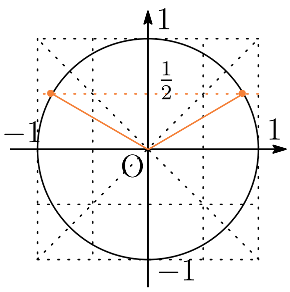
問題 4.

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
度数	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$	$\pm 120°$	$\pm 135°$	$\pm 150°$	$180°$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	定義できない	$\mp\sqrt{3}$	∓ 1	$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

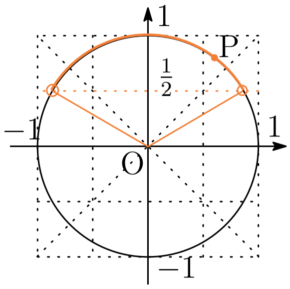
問題.5

(1) $2\sin\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta = \dfrac{1}{2}$

これと **問題.3** の答えの図を比較して $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ と $\dfrac{5\pi}{6}$.



(2) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$



図において, P は単位円周上を A から θ ラジアン回転した点とする. このとき P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である.

$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$

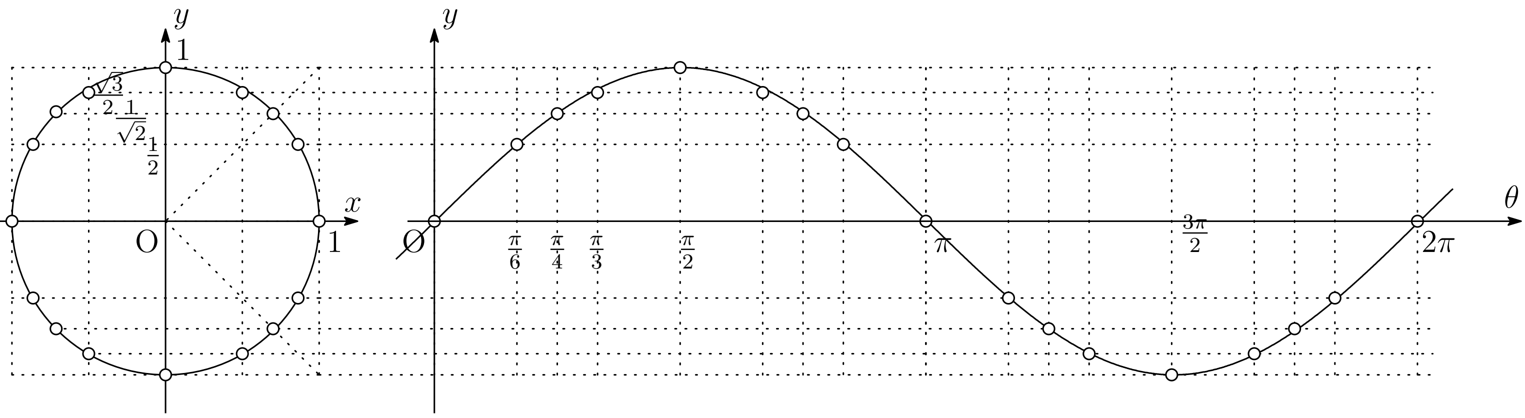
であるとき P は図の太線の部分にあるので前問の結果を使って

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}.$$

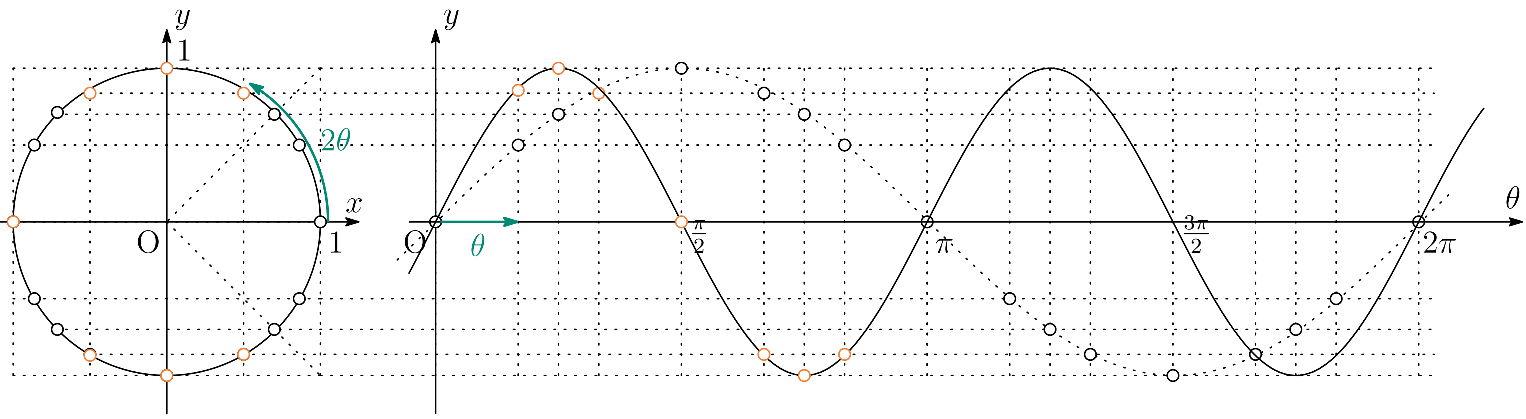
であることが分かる.

問題.6　次の目盛りを用いてグラフを描け.

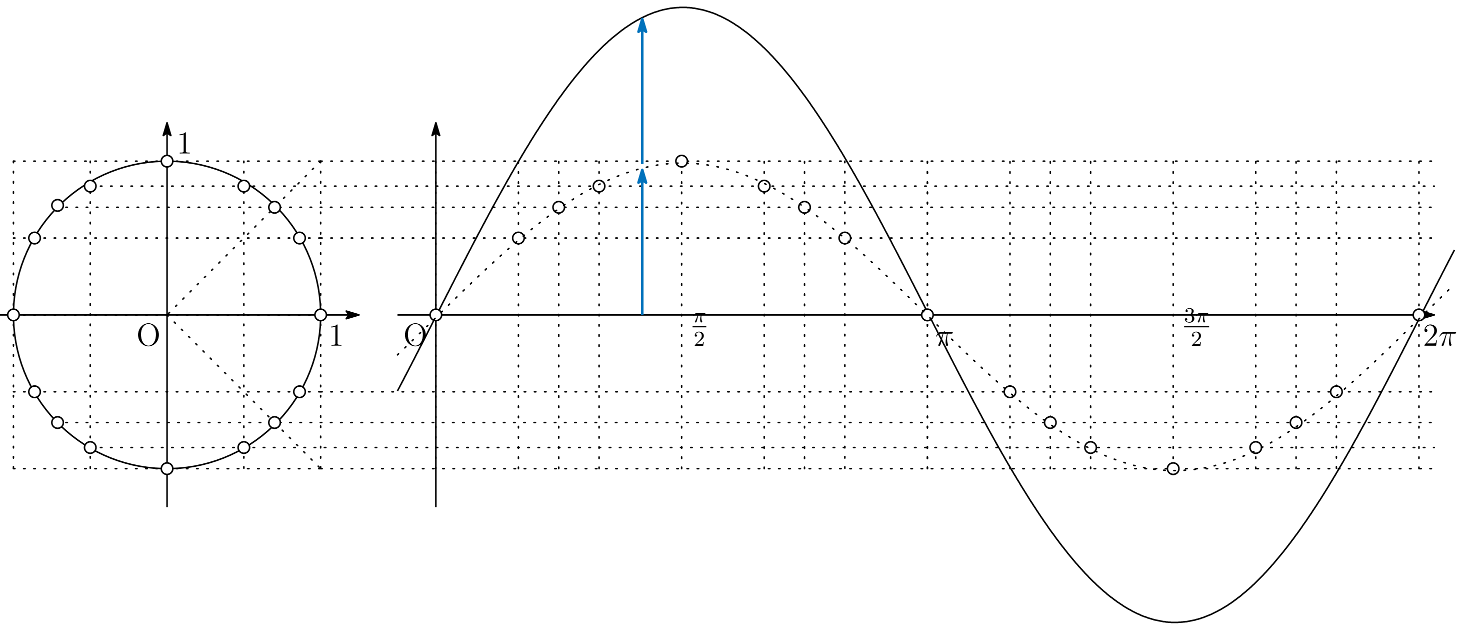
(1)　$y = \sin\theta$



(2)　$y = \sin 2\theta$



(3)　$y = 2\sin\theta$



ここから（その 2）

問題 1.　(1) 関数 $f(x)$ の, a における微分係数 $f'(a)$ を定義する式を書け.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a は定数であることに注意。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義する式を書け.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x は変数であることに注意。

問題 2.

(1) $f(x)=x^2$ とする．この関数の 1 における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$f(x)=x^2$ のとき $f(1)=1^2$, $f(1+h)=(1+h)^2$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-(1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

$h\neq 0$ としてよいから h で約分して

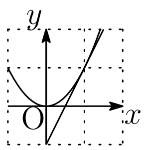
$$= \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

(2) (1) の関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

接線は, 傾きは $f'(1)=2$ で点 $(1, f(1))=(1,1)$ を通る直線だから

$y=2(x-1)+1=2x-1$

(3) (1) の関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



1 メモリは 1

(4) (2) の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f(x)=x^2$ のとき $f(x)=x^2$, $f(x+h)=(x+h)^2$ に注意せよ。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$h\neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

問題 3. $f(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

$f(x) = x^n$ だから $f(x+h) = (x+h)^n$. ここで $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1})$ を利用して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h) - x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right)}{h} \end{aligned}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0}((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

問題 4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする.

(1) この関数の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f(x+h) = \dfrac{1}{(x+h)}$ に注意せよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{x(x+h)} \end{aligned}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

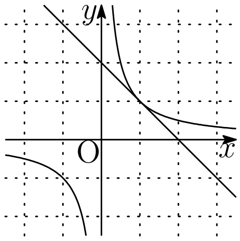
(2) この関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 1 である点は $(1, f(1)) = (1, 1)$ である.

傾きは $f'(1) = -1$ だから

$y - 1 = -1(x - 1)$ 整理して $y = -x + 2$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 5. $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

$f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(x+h) = \sqrt{(x+h)}$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ を利用して

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(x+h) - x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$