環境基礎解析学I 演習問題 No. 3 解答

問題 1. 次の式を計算し簡単にせよ.

(1) $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

有理数べきに直して指数法則を使い

$$\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(2^5 \times 3)^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{(2^5)^{\frac{1}{5}}\, 3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{2^{5\times\frac{1}{5}}\, 3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 2^{5\times\frac{1}{5}}\, 3^{\frac{1}{5}}\, 3^{-\frac{1}{5}} = 2^{5\times\frac{1}{5}}\, 3^{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}} = 2^1\, 3^0$$
$$= 2$$

(2) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{4}$

有理数べきに直して指数法則を使い

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}}.$$

(3) $4^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{2\times\frac{1}{2}} \times 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 \times 2^1 = 4.$

(4) $8^{-\frac{1}{2}} \div 4^{-\frac{1}{2}} = 2^{3\times(-\frac{1}{2})} \div 2^{2\times(-\frac{1}{2})} = 2^{-\frac{3}{2}} \div 2^{-1} = 2^{-\frac{3}{2}-(-1)} = 2^{-\frac{1}{2}}.$

(5) $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[4]{16} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} = 4.$

(8) $\sqrt{48} - \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 4^2} - \sqrt{3 \times 5^2} = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}.$

問題 2. 次の値を求めよ.

(1) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ だから $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$

(2) $3^{2} = 9$ だから $\log_3 9 = 2$

(3) $3^{1} = 3$ だから $\log_3 3 = 1$

(4) $3^{0} = 1$ だから $\log_3 1 = 0$

(5) $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ だから $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$

(6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ だから $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

(7) $3^{\log_3 5} = M$ とおくと, $\log_3 M = \log_3 5$ だから真数を比較して $M = 5$.

(8) $\log_2 \left(2^{\frac{1}{2}}\right) = p$ とおくと, $2^p = 2^{\frac{1}{2}}$ だから指数を比較して $p = \dfrac{1}{2}$

問題 3. $a > 0,\ M > 0,\ N > 0,\ k$ は実数 とするとき

$\log_a \left(M^k\right) = k \log_a M$

となることを確かめよ.

$\log_a M = p$ とおく. $\log_a$ の定義により $a^p = M$ である. したがって両辺 k 乗して $M^k = (a^p)^k$ であるが, さらに指数法則により $(a^p)^k = a^{kp}$ である. だから $M^k = a^{kp}$ である. 再び $\log_a$ の定義により $\log_a \left(M^k\right) = kp = k \log_a M$ である.

問題 4. $x, y, z > 0$ のとき, $X = \log_a x,\ Y = \log_a y,\ Z = \log_a z$. 次の式を X, Y, Z で表せ. ただし, $a > 0, \quad a \neq 1$ とする.

(1) $\log_a(x^3y^2z)$

$= \log_a(x^3) + \log_a(y^2) + \log_a(z)$

$= 3\log_a(x) + 2\log_a(y) + \log_a(z)$

$= 3X + 2Y + Z$

(2) $\log_a \dfrac{xy^2}{z^3}$

$= \log_a(x) + \log_a(y^2) - \log_a(z^3)$

$= \log_a(x) + 2\log_a(y) - 3\log_a(z)$

$= X + 2Y - 3Z$

問題 5. 次の等式を満たす x または a の値を求めよ.

(1) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = x$

対数の定義より, $\sqrt{2}^{\,x} = 2\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ だから

右辺 $= (2^{\frac{1}{2}})^x = 2^{\frac{x}{2}}$.

左辺 $= 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.

したがって指数を比較して, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}$, $x = 3$.

(2) $\log_3 x = -2$

定義より, $3^{-2} = x$.

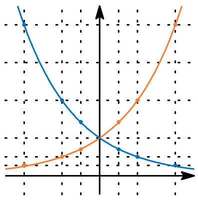
$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ だから

$x = \dfrac{1}{9}$.

問題 6 (1) 空欄に適する数を書き入れよ.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) $y = 2^x$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを書け.

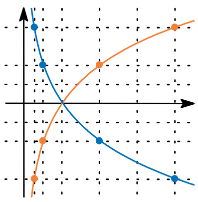


これらが y 軸に関して対称であることに注意せよ。それは $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ であることによる。一般に $y = f(x)$, $y = f(-x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

(3) 空欄に適する数を書き入れよ.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

(4) $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを書け.



これらが x 軸に関して対称であることに注意せよ。それは $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ であることによる。一般に $y = f(x)$, $y = -f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称である。

問題 7 a, x, y, z を正の数とし, $a \neq 1$ とする. 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_a 1 = 0$.

(2) $\log_a a = 1$

(3) $\log_3 4 - \log_3 12 = \log_3 \dfrac{4}{12} = \log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -\log_3 3 = -1$.

(4) $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$.

底の変換公式により $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{\log_2 3}$.

したがって $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$.

(5) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \times 3) = \log_6 6 = 1$.

(6) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

(7) $\log_3 \sqrt[3]{12} - \dfrac{2}{3} \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{3 \times 2^2} - \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \log_3 \left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

(8) $(\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 4 + \log_9 8) = \frac{35}{4}$.

底の変換公式を用いて底を 2 に統一すると

$$(\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 4 + \log_9 8)$$
$$= \left(\frac{\log_2 9}{\log_2 2} + \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 8}{\log_2 9} \right) = \left(\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2} + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} \right) \left(\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3^2} \right)$$
$$= \left(2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{2} \right) \left(2 \frac{1}{\log_2 3} + \frac{3}{2 \log_2 3} \right) = \frac{35}{4}.$$

問題 8 複利法により利率 r で期間 n だけ預けた預金の元利合計は元金の $(1+r)^n$ 倍である. 年利 5% で 10 万円を預けたとき元利合計が初めて 20 万円を超えるのは何年後か. (概数 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 1.05 = 0.021189$ を用いよ.)

問題 8

$r = 0.05$ だから、n 年後に2倍になるとすると

$$(1.05)^n \geqq 2.$$

両辺 常用対数をとると、常用対数は単調増加だから

$$\log_{10}((1.05)^n) \geqq \log_{10} 2$$

左辺 $= n \log_{10}(1.05)$.

$1.05 > 1$ より $\log_{10}(1.05) > 0$ だから

$$n \geqq \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} \fallingdotseq \frac{0.3010}{0.021189} = 14.2054\ldots$$

だから 15年後.