環境基礎解析学 I 演習問題 No. 1 解答

1.

(1) $A = \{\ n\ ;\ n \in \mathbb{Z},\ -2 < n \leqq 5\ \} = \Big\{ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \Big\}$

(2) $B = \{\ 2n-1\ ;\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqq n < 6\ \} = \Big\{\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \Big\}$

(3) $C = \{\ a^2\ ;\ a \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq a \leqq 5\ \} = \Big\{\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ \Big\}$

(4) $A \cap B^c = \Big\{ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4\ \Big\}$

(5) $B \cup C = \Big\{\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 16,\ 25\ \Big\}$

2. 次の推論は正しいか。正しいときは証明を与え, 正しくないときは反例を作れ.

証明に使うことのできる基本性質は, 任意の実数 a, b, c に対して

$$
\begin{aligned}
&a < b, b < c \text{ ならば } a < c \ \cdots\ \text{(i)}\\
&a < b \text{ ならば } a + c < b + c, a - c < b - c \ \cdots\ \text{(ii)}\\
&a < b, c > 0 \text{ ならば } ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \ \cdots \text{(iii)}\\
&a < b, c < 0 \text{ ならば } ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \ \cdots \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

と, これらの $<$ を ((iii) の $c > 0$, $c < 0$ 以外) $\leqq$ で置き換えたものである.

(1) 任意の実数 A, B, C, D に対して

$$A \leqq B, C \leqq D \ \Rightarrow\ A + C \leqq B + D$$

は正しい. なぜなら

$A \leqq B$ と (ii) より $A + C \leqq B + C$.

$C \leqq D$ と (ii) より $B + C \leqq B + D$

がわかるので, (i) より $A + C \leqq B + D$

がわかるからである.

(2)

$$A \leqq B, C \leqq D \ \Rightarrow\ A - C \leqq B - D$$

は任意の実数 A, B, C, D に対して正しいとは言えない.

たとえば $A=1,\ B=2,\ C=1,\ D=3$ とすると $A \leqq B,\ C \leqq D$ は成り立つが $A-C=0,\ B-D=-1$ だから $A-C \leqq B-D$ は成り立たない. これが反例である.

(3) 任意の実数 A に対して $A^2 \geqq 0$ は正しい. なぜなら

i) $A=0$ のときは $A^2=0$ だから明らか.

ii) $A>0$ のときは両辺に A をかけると (iii) の前半より

$A \times A > 0 \times A = 0$ だから

$A^2 > 0$

iii)$A<0$ のときは両辺に A をかけると (iii) の後半により

$A \times A > 0 \times A = 0$ だから

$A^2 > 0$

i), ii), iii) によりいつでも $A^2 \geqq 0$ が成り立つ.

(4) 任意の実数 A, B に対して

$$A^2 \leqq B^2,\ \Rightarrow\ A \leqq B$$

は正しくない. なぜなら $A=1,\ B=-2$ とすると $A^2 \leqq B^2$ は成り立つが $A \leqq B$ は成り立たない. これが反例である.

(5) 任意の実数 A, B に対して

$$A^2 \leqq B^2, A \geqq 0, B \geqq 0\ \Rightarrow\ A \leqq B$$

は正しい. なぜなら $A^2 \leqq B^2$ だから $B^2-A^2=(B+A)(B-A) \geqq 0$

また $A \geqq 0,\ B \geqq 0$ より $A+B \geqq 0$

$A=B=0$ のときは明らかに $A \leqq B$

そうでないときは

$A+B>0$ だから

両辺を $A+B$ で割ると

$B-A \geqq 0$

したがって $A \leqq B$

よって正しい.

(6) 任意の実数 A, B に対して

$$AB \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{(A \geqq 0 \text{ かつ } B \geqq 0) \text{ または } (A \leqq 0 \text{ かつ } B \leqq 0)\}$$

は正しい. 以下確かめる.

A, B の符号には次の 9 つの場合がある.

(a) $A > 0$ かつ $B < 0$	(b) $A > 0$ かつ $B = 0$	(c) $A > 0$ かつ $B > 0$
(d) $A = 0$ かつ $B < 0$	(e) $A = 0$ かつ $B = 0$	(f) $A = 0$ かつ $B > 0$
(g) $A < 0$ かつ $B < 0$	(h) $A < 0$ かつ $B = 0$	(i) $A < 0$ かつ $B > 0$

(iii) を使うと

(c), (g) となる $\Leftrightarrow$ $AB > 0$,

(a), (i) となる $\Leftrightarrow$ $AB < 0$,

その他の場合 $\Leftrightarrow$ $AB = 0$

であることが分かる.

$$\{(A \geqq 0 \text{ かつ } B \geqq 0) \text{ または } (A \leqq 0 \text{ かつ } B \leqq 0)\}$$

と言うのは, (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) の場合を合わせたものであるから表から明らかに分かる.

3. (1) $4x - 3 \leqq 0$

1.2 の解説で述べた基本性質の (ii) により

$4x - 3 + 3 \leqq 0 + 3$

すなわち

$4x \leqq 3$

基本性質 (iii) により

$\dfrac{4x}{4} \leqq \dfrac{3}{4}$

すなわち

$x \leqq \dfrac{3}{4}$

したがって x の値の範囲は

$(-\infty, \frac{3}{4}]$

(2) $-3x+5<-x+3$

基本性質 (ii) により

$-3x+5-5<-x+3-5$

すなわち

$-3x<-x-2$

基本性質 (ii) により

$-3x+x<-x-2+x$

すなわち

$-2x<-2$

基本性質 (iii) により

$\dfrac{-2x}{-2}>\dfrac{-2}{-2}$

すなわち

$x>1$

$(1,\infty)$

(3) $x+1<2x \leqq 3x-2 \Leftrightarrow x+1<2x$ かつ $2x \leqq 3x-2$

$\Leftrightarrow 1<x$ かつ $0 \leqq x-2 \Leftrightarrow 1<x$ かつ $2 \leqq x \Leftrightarrow 2 \leqq x$

(4) 2 次方程式 $x^2+x-1=0$ の解は $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ だから因数定理により $x^2+x-1=\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ と因数分解できる．ところで

「任意の実数 A と B に対して,

$A \leqq 0, B \geqq 0 \ \Rightarrow \ AB \leqq 0,$

$A \leqq 0, B \leqq 0 \ \Rightarrow \ AB \geqq 0$ 」

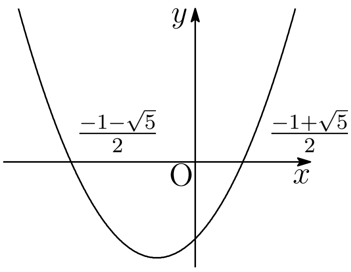
であるから (前問と同様に確かめておいてください) $\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ の符号を調べると

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

となる. したがって $\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \leqq 0$ となる x の値の範囲は

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

である. また, 関数 $y=x^2+x-1$ のグラフが



であることから導いてもよい. グラフが描ければこちらの方が簡単である.

$$\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

A を実数, B を正の数とするとき, 絶対値の定義により

$|A|<B \ \Leftrightarrow -B<A<B,$

$|A|>B \ \Leftrightarrow A<-B$ または $B<A$

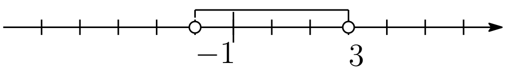
であることに注意せよ.

(5) $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2$

$\Leftrightarrow -2+1<x<2+1$

$\Leftrightarrow -1<x<3$

だからこのような x の集合は区間 $(-1,3)$ である.

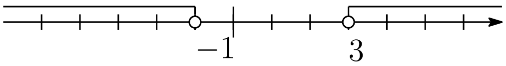


(6) $|x-1|>2 \Leftrightarrow x-1<-2$ または $2<x-1$

$\Leftrightarrow x < -2+1$ または $2+1 < x$

$\Leftrightarrow x < -1$ または $3 < x$

だからこのような x の集合は二つの区間の合併集合 $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ である.



(7) $x^2 > 9$

2 次方程式 $x^2 - 9 = 0$ の解は $x = \pm 3$ だから因数定理により $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ と因数分解できる. ところで

「任意の実数 A と B に対して,

$A > 0, B > 0 \ \Rightarrow \ AB > 0,$

$A > 0, B < 0 \ \Rightarrow \ AB < 0,$

$A < 0, B < 0 \ \Rightarrow \ AB > 0$ 」

である.

ここで $(x-3)$, $(x+3)$ の符号を調べると

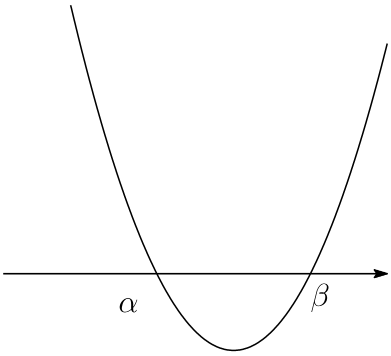
x	$x < -3$	-3	$-3 < x < 3$	3	$3 < x$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

となる. したがって $(x+3)(x-3) > 0$ となる x の値の範囲は $(x-3)$, $(x+3)$ の符号が同じになるところであるから

$x < -3$ または $3 < x$

である.

二次関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフが



のようであることを知っていれば、これを使う方が早い。

(8) $x^2 < 4$

2 次方程式 $x^2 - 4 = 0$ の解は $x = \pm 2$ だから因数定理により $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ と因数分解できる. $x-2$ と $x+2$ の符号使って $(x-2)(x+2)$ の符号を調べると

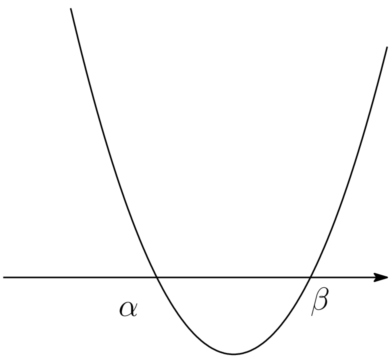
x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

となる. したがって $(x+2)(x-2) < 0$ となる x の値の範囲は

$-2 < x < 2$

である.

二次関数 $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフが



のようであることを知っていれば、これを使う方が早い。

(9) $x^2 + x + 1 > 0$

判別式 $D = -3 < 0$ だから $x^2 + x + 1 = 0$ には実数解なし。したがって $y = x^2 + x + 1$ のグラフは x 軸と交わらないので, すべての x にたいして $x^2 + x + 1 > 0$ である。だから解は「すべての実数」。

(10) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 > 0$

$x = -1$ が $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ のひとつの解になるので $x+1$ で割って

$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$.

(9) によりすべての x に対して $x^2+x+1>0$ だから

$x^3+2x^2+2x+1>0 \iff x+1>0 \iff x>-1$

4.

(1) 正の実数 x を小数第 2 位で四捨五入すると 10.3 になった。 x の真の値の存在範囲を数直線上で表せ. また区間で表せ.

(2) また y を小数第 1 位で四捨五入すると 2 になった。$x+y$ の真の値の存在範囲を数直線上で表せ. また区間で表せ.