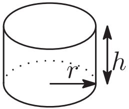
本日やること

1. 積分法の応用
   - 立体の体積

2. 微分方程式
   - 微分方程式とはどういうものか

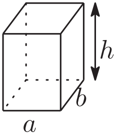
積分の応用
立体の体積

[円柱の体積]



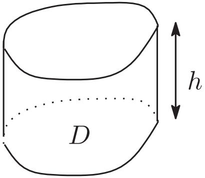
$V = \pi r^2 h$

[四角柱の体積]



$V = abh$

柱体の体積



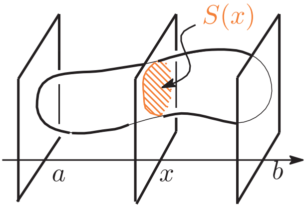
$V = Sh$

平面図形 D を垂直に h だけ平行移動して得られる立体を底面 D 高さ h の (直) 柱体という。
D の面積を S とするときこの柱体の体積 V は

$$V = Sh$$

積分の応用
立体の体積

立体図形の体積

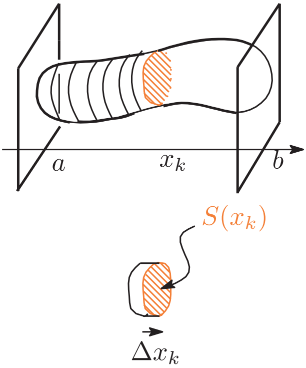


図のような立体図形を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とすると，体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

積分の応用
立体の体積

[確かめ]



立体を分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ によって, x 軸に垂直な平面で薄切りにする。

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

とすると (直柱体で近似して)

k 番目の断片の体積 $\fallingdotseq S(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$V \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

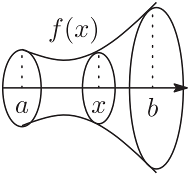
分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx \quad (S(x)\,dx \text{ は微小柱体の体積である})$$

積分の応用

立体の体積

回転体の体積



曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b \quad (a < b)$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$$

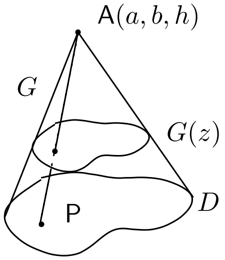
[確かめ]

立体を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $|f(x)|$ の円であるから, その面積は $S(x) = \pi f(x)^2$ だから。

積分の応用

立体の体積

錐体の体積



D を xy 平面の閉領域とし, 座標 (a, b, h) $(h > 0)$ の点を A とする. このとき, D の各点 P と A を結ぶ線分 AP をすべて集めてできる立体図形 G を, D を底面, A を頂点とする錐体という. G の体積 V は D の面積を S とするとき

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

である.

積分の応用

立体の体積

[確かめ] G を, 点 $(0, 0, z)$ を通り z 軸に垂直な平面で切った断面 $G(z)$ は D と相似で相似比は $h : h - z$, 面積比は $h^2 : (h - z)^2$ である. したがって $G(z)$ の面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 S$$

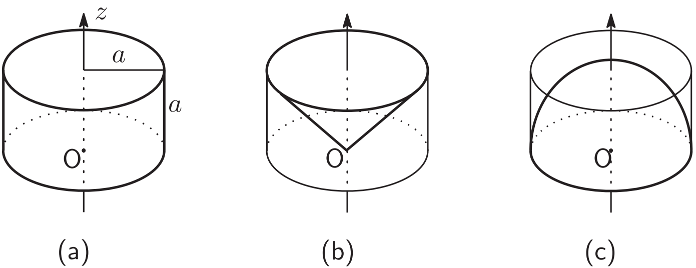
であり,

$$V = \int_0^h \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 dz\, S = \frac{1}{3} Sh$$

である.

積分の応用
立体の体積

[例題]

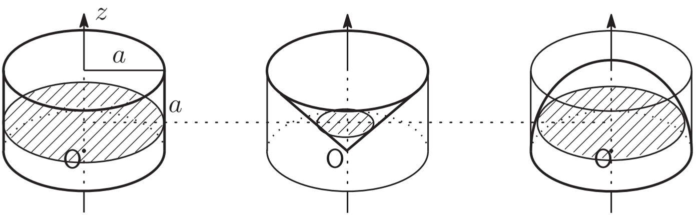


(a):底面の半径 a, 高さ a の円柱,　(b): それに内接する円錐,　(c): 半径 a の球の上半部分である.

(a) の体積 V_a, (b) の体積 V_b, (c) の体積 V_c を求め, $V_a = V_b + V_c$ であることを確かめよ.

積分の応用

立体の体積

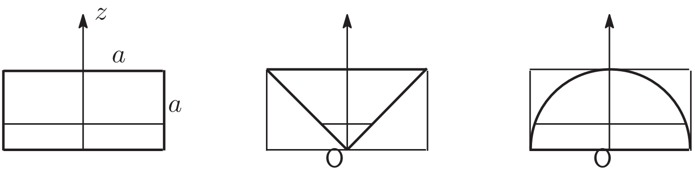


(a)　(b)　(c)

高さ z で切った切り口の面積をそれぞれ $S_a(z)$, $S_b(z)$, $S_c(z)$ とする

積分の応用

立体の体積



(a) (b) (c)

$$S_a(z) = \pi a^2, \quad S_b(z) = \pi z^2, \quad S_c(z) = \pi(a^2 - z^2)$$

だから

$$V_a = \int_0^a \pi a^2 \, dz = \pi a^3, \quad V_b = \int_0^a \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} a^3,$$

$$V_c = \int_0^a \pi(a^2 - z^2) \, dz = \frac{2\pi}{3} a^3$$

これから $V_a = V_b + V_c$ がわかる。

積分の応用
立体の体積

実は, 任意の z に対して $S_a(z) = S_b(z) + S_c(z)$ であることから

$$V_a = V_b + V_c$$

であることが (積分をしなくとも) 直ちに分かる.

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[方程式とは]

未知数 x の関係式

例 ： $x^2 - 3x + 2 = 0$

解： $x = 1$ と $x = 2$

[微分方程式 とは]

独立変数：x

未知関数：$y(x)$

その導関数：$y'(x), y''(x), \cdots$

の関係式

例： $y'(x) = 3y(x)$

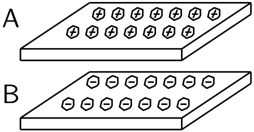
解： $y(x) = C\,e^{3x}$

(C は任意の定数)

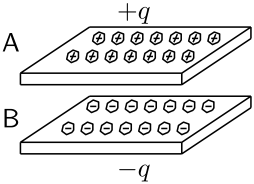
微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 1. コンデンサーの放電]



平行に置かれた 2 枚の金属板に電荷をためることができる。
この状態で B から A に単位電荷を運ぶためには (電気力に逆らって電荷を運ばなくてはならないので) 仕事が必要。
この仕事の量を AB 間の電位差といい, V で表す。(単位はボルト)



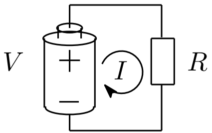
A の電荷を $+q$(クーロン), B の電荷を $-q$(クーロン) とする。
電位差 V は q に比例するから

$$q = CV \cdots (\star 1)$$

この比例定数 C を静電容量という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



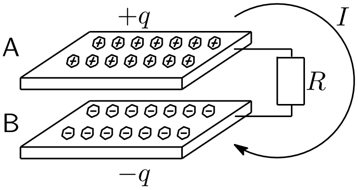
電位差 V のある 2 点を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる。その関係は

$$V = I\,R \cdots (\star 2)$$

電池は電荷が無制限にあるので，電位差を保ったままいつまでも電流が流れ続ける（と考える）。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



電荷を帯びた金属版を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる. I は A から B の向きに測ることにする。

[1]. 電位差 V に応じて I が (微小時間) 流れる

[2]. その結果電荷 q が微小に失われる

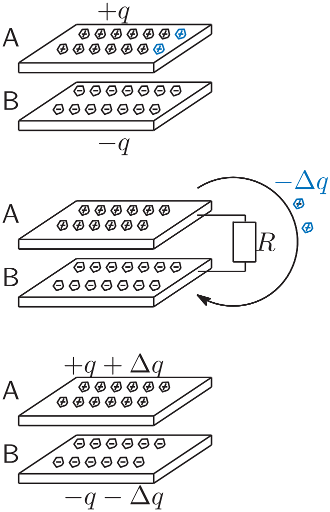
[3]. その結果電位差 V が微小に減少する

以上の [1], [2], [3] が繰り返し起こる。これが連続的に起こったらどうなるか調べたい。

q, V, I は時刻 t の関数となるので, $q(t)$, $V(t)$, $I(t)$ と書く。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



この $I(t)$ を計算しよう。
t から $t+\Delta t$ までの A の電荷 $q(t)$ の変化量は

$$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t) \ (< 0)$$

またこのときの A から B への電荷の移動量は電流が流れる分だけ電荷が減少するのであるから $-\Delta q$ である。
1 秒間に 1 クーロンの電荷が流れるとき 1 アンペアの電流というのであるから

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \fallingdotseq -I(t)$$

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

$\Delta t \to 0$ とする極限をとって

$$\frac{dq}{dt} = -I(t) \cdots (\star 3)$$

$(\star 1)$, $(\star 2)$, $(\star 3)$ をまとめて

$$-I(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CR\frac{dI}{dt}$$

$$CR\frac{dI}{dt} + I(t) = 0 \cdots (\star 4)$$

この $(\star 4)$ のような未知の関数 $I(t)$ とその導関数の関係式を微分方程式という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

この微分方程式 $(\star 4)$ を満たす関数 (これを微分方程式の解という) は

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

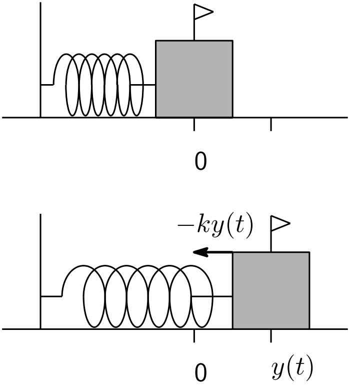
である。

[確かめ]

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 2. 単振動]



図のように壁面に物体がバネでつながれている．床は摩擦がないものとする．
時刻 を t [s],
物体の質量を m [kg],
物体の時刻 t での位置を $y(t)$ [m] で表す．

ばねが伸縮していないときの物体の位置を原点とすると，物体にはバネの弾性力 $-ky(t)$ [N] が働く．($k > 0$ は弾性定数) $-$ がつくのは力の向きが変位 y の向きと反対だからである。運動方程式から $y(t)$ は微分方程式

$$my''(t) = -ky(t)$$

を満たすことがわかる．

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

解は

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{または} \quad y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

(C_1, C_2, A, φ は $y(0)$, $y'(0)$ から決まる定数)

である.

[確かめ]