本日やること

1. 積分法
   - 広義積分法
2. 積分法の応用
   - 平面図形の面積

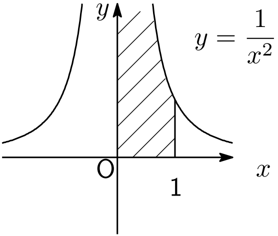
定積分法

広義積分

$$f(x) \text{ は有界閉区間 } [a,b] \text{ で連続} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ が存在}$$

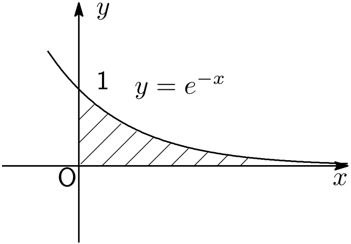
[1. 端の点で不連続な (または連続になるように定義できない) 場合]

例



2. [積分区間が有界でない場合]

例

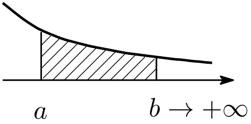


の積分も重要である.
このような場合の関数 $f(x)$ の定積分を定めよう.

定積分法

広義積分

[1] 区間 $[a, \infty)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a, \infty)$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するとき**広義積分** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **は収束する**といい, その値を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[F(x)\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[2] 区間 $(-\infty, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(-\infty, b]$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a)$$

となる。これを

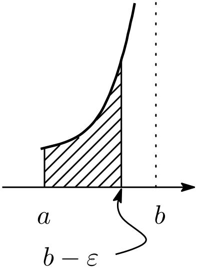
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[3] 区間 $[a, b)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a, b)$ で連続であるが $x = b$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき**広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する**といい, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[F(x)\Big]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[4] 区間 $(a, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(a, b]$ で連続であるが $x = a$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon \to +0} F(a+\varepsilon)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$$

と書く。

定積分法

広義積分

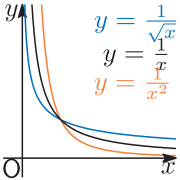
[例題 6.3.5]

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 1.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \log b - 0 = \infty.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_{+0}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to+0} \log\varepsilon = \infty.$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$



定積分法
広義積分

広義積分でも部分積分法・置換積分法が使える

[例 1] $\displaystyle\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ だから

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$

であるが, $-2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{-dt}{2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \infty \Rightarrow t \to -\infty$ だから

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^t\,\frac{(-dt)}{2} = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$$

としてもよい。

定積分法

広義積分

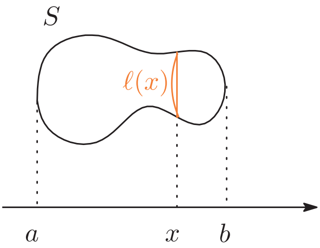
[例 2]

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx &= \int_0^{\infty} x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\,dx \\
&= \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\,dx \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



左図のような図形を，点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする．$\ell(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

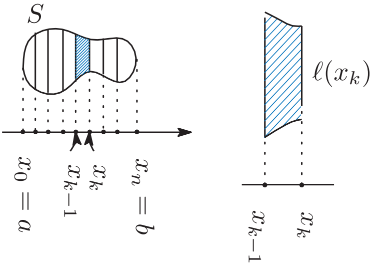
$$S = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

.

積分法の応用

平面図形の面積

[確かめ]



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

k 番目の断片の面積 $\fallingdotseq \ell(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

$\ell(x)\,dx$ は微小長方形の面積であることに注意せよ。

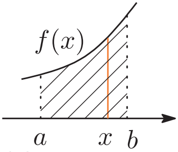
積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

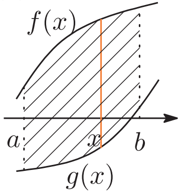
(i)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ であるとき,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であるとき,

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

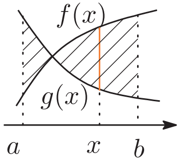
積分法の応用

平面図形の面積

$f(x)$, $g(x)$: 連続, S : 斜線部分の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



区間 $[a, b]$ で $f(x)$, $g(x)$ の大小関係が一定でないときでも

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

[確かめ]

(i) のとき, $\ell(x) = f(x)$,

(ii) のとき, $\ell(x) = f(x) - g(x)$,

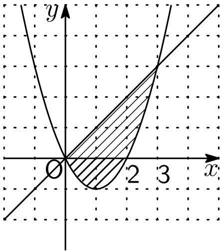
(iii) のとき, $\ell(x) = |f(x) - g(x)|$

だから。

積分の応用

平面図形の面積

[例題] 関数 $y = x^2 - 2x \cdots (\star)$ のグラフである放物線と, $y = x \cdots (\star 2)$ のグラフである直線で囲まれる図形の面積を求めよう。



$(\star)$ は $y = x^2 - 2x = x(x-2)$ だから $y = 0$ となるのは $x = 0$ または 2 のとき。 だから x 軸との交点は $(0,0)$ と $(2,0)$。 また $y = (x-1)^2 - 1$ だから頂点が $(1,-1)$ の放物線である. $y'' = 2 >$ だから下に凸。

$(\star 2)$ は原点をとおり傾き 1 の直線。

交点の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$ をといて $(0,0)$ と $(3,3)$.

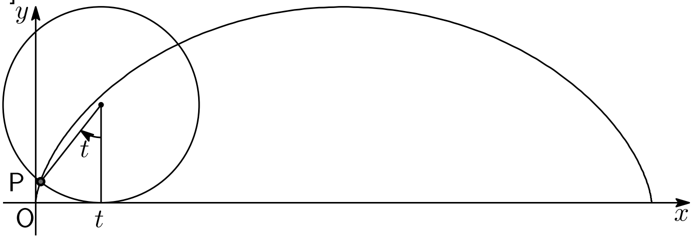
この図形は $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあり, この範囲では $(\star 2)$ が $(\star)$ の上方にあるから面積は

$$\int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\}\,dx = \int_0^3 \{-x^2 + 3x\}\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

積分の応用

平面図形の面積

[例]



$a > 0$: 定数　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき

$$(\star) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

によってパラメータ表示される曲線 C を cycloid (サイクロイド) 曲線 という. C と x 軸で囲まれた部分 D の面積を求める.

積分の応用

平面図形の面積

x, y が $(\star)$ を満たすとき, 点 P(x, y) が動いてできる奇跡が C である.

$$\ell(x) = y = a(1 - \cos t),$$

$x = a(t - \sin t)$ により変数変換すると $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ だから

$$dx = a(1 - \cos t)dt$$

だから置換積分により

$$D \text{ の面積} = \int_0^{2\pi a} \ell(x)\, dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$