本日やること

1. 積分法
   - 復習：原始関数と不定積分
   - 定積分の考え方
   - 定積分の定義
   - 定積分の性質
   - 微分と積分の関係
   - 定積分の置換積分法

積分法
原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数 $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ で表すと，すべての原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

で表される．これを $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 C を積分定数という．要するに

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

定積分法
初めに

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

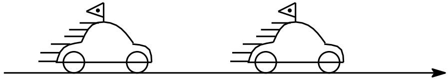
によって 高校では 定めたのであった.
これでは $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が計算できないとき困るので, 原始関数を用いない定義を考える.

定積分法

導入

動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$ とする.

時刻 t $t+h$



y

座標 $f(t)$ $f(t+h)$

このとき

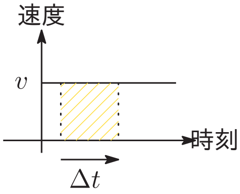
(時刻 t の) 瞬間の速度 $v(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \dfrac{dy}{dt}$

今回は逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

定積分法

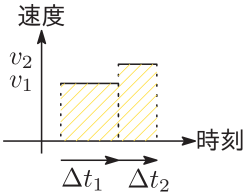
導入

[$v=$ 一定の場合]　($v \geqq 0$ とする)



位置の変化量 $= v \times \Delta t = \square$ の面積

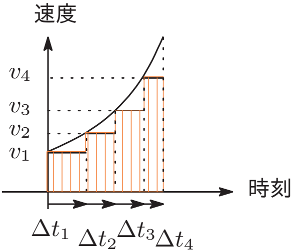
[v が変化する場合]

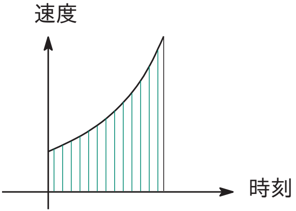


位置の変化量 $= v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 = \square$ の面積

定積分法
導入

[v が連続的に変化する場合]





位置の変化量

$$\fallingdotseq v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 + v_3\,\Delta t_3 + v_4\,\Delta t_4$$

$=$ □の面積

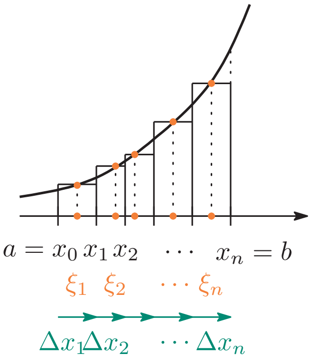
$$\downarrow$$

□の面積

定積分法

定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する.



$y = f(x)$: 関数　$a < b$ とし,

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

: 区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする.

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という.

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき, $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるという. この極限を $f(x)$ の a から b までの定積分とよび, $\int_a^b f(x)\,dx$ で表す. つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

である. a を積分の下端, b を上端という.

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (II)

a を下端, b を上端とするとき, $a > b$ の場合も $(\star)$ で定義する. ただしこのとき

$$\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b$$

$$x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (\leqq 0), \quad k = 1, \cdots, n$$

である.

したがって

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

定積分法

定積分の定義

[例] 定数関数の場合。
$f(x) = c$, $a \leqq x \leqq b$ (c は定数) とすると, ξ_k によらず常に $f(\xi_k) = c$, $k = 1, \cdots, n$ だから

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b-a)$$

したがって

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

定積分法

定積分の定義

[例] $f(x) = x$ $(a \leqq x \leqq b)$ の場合。
$f(x)$ は連続だから積分可能。したがって $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在することが知られている。そこで特別に

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad \xi_k = x_k, \; k = 1, \quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \; (k = 0, 1, \cdots, n)$$

とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \frac{(b-a)}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a \frac{(b-a)}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(b-a)}{n} \frac{(b-a)}{n} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\
&\to \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の定義

したがって

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

定積分法

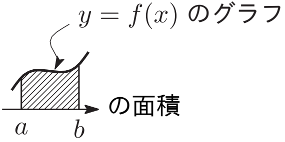
定積分の性質

定積分の大事なこと

(I) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a,b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$



の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$$\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$$ (時刻 a から b までの位置の変化量)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$$

(ii) $$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$ (ただし k は x によらない定数)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質 (続き)

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(v) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

特に，$f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

(vi) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (ただし $a < b$ の場合)

定積分法

微分と積分の関係

[目標]

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

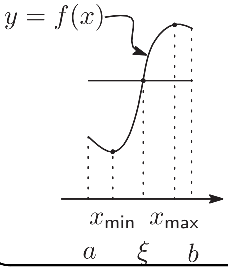
   高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

定積分法

微分と積分の関係

積分の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad a \leqq \xi \leqq b$$

となる ξ が存在する.

[確かめ]　$f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから $[a, b]$ において

最大値 : $M = f(x_{\mathrm{max}})$,　最小値 : $m = f(x_{\mathrm{min}})$

がある. (最大値最小値の定理.)

定積分法
微分と積分の関係

$m \leqq f(x) \leqq M$ であるから

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

したがって

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

だから

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

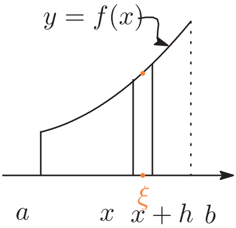
となる ξ が x_{max} と x_{min} の間に存在する. (連続関数に対する中間値の定理)

ここに現れる $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ を区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の平均値という.

定積分法

微分と積分の関係

微分積分学の基本定理



$f(x)$: $[a,b]$ で連続

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている．つまり連続関数は原始関数を持つといってよい．

定積分法

微分と積分の関係

[確かめ] 積分の平均値の定理により

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi),\quad x \leqq \xi \leqq x+h$$

となる ξ があるが, $h \to 0$ のとき $\xi \to x$ したがって $f(\xi) \to f(x)$.

定積分法

微分と積分の関係

定積分と原始関数の関係

$f(x)$: $[a,b]$ で連続

$F(x)$: $f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く} \right)$$

[確かめ] $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $f(x)$ の原始関数になっている．だからある定数 C があって

$$G(x) = F(x) + C.$$

定積分法

微分と積分の関係

$x = a$ を代入して

$$G(a) = F(a) + C.$$

$G(a) = 0$ だから

$$F(a) = -C.$$

$x = b$ を代入して

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ だから結論が得られた。

定積分法

定積分の部分積分

定理：定積分の部分積分法

$f(x),\ g(x)$ ：共に微分可能， $f'(x),\ g'(x)$: 共に連続であるとき

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[確かめ] 不定積分の部分積分法は

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

移項して

$$\iff \int \bigl(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\bigr)\,dx = f(x)g(x)$$

両辺定積分して

$$\Rightarrow \int_a^b \bigl(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\bigr)\,dx = \Bigl[f(x)g(x)\Bigr]_a^b$$

移項して

$$\iff \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Bigl[f(x)g(x)\Bigr]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[例題 6.3.4]　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$ を計算する.

$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$ したがって

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx = \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の置換積分法

定積分の置換積分法]

$x=\varphi(t)$: $[\alpha,\beta]$ 上で連続微分可能　$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

[確かめ]

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{とおくと} \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

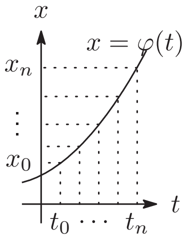
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$$

で一致する.

定積分法

定積分の置換積分法

[別証明] $x = \varphi(t)$ のグラフは図のようであるとする．



$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$: t の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割

$x_k = \varphi(t_k), \ k = 0, \cdots, n$

ならば

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$: x の区間 $[a, b]$ の分割

となる．さらに

$t_{k-1} \leqq \xi_k \leqq t_k, \quad k = 1, \cdots, n$

をとり $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ とすると $x_{k-1} \leqq \eta_k \leqq x_k$, また

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \ k = 1, \cdots, n$

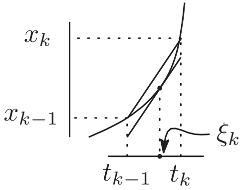
とする。

$$左辺 = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k \qquad 右辺 = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

となる。

定積分法

定積分の置換積分法



平均値の定理により

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{dx}{dt}(\xi_k) = \varphi'(\xi_k)$$

となるように ξ_k をとることができるから

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\Delta t_k = \varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

としてよい．したがって

右辺 $=$ 左辺.

定積分法

定積分の置換積分法

[例題] $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0$ は定数$)$ を求める。

$\displaystyle\left(\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right.$ は利用しない。$\left.\right)$

$x = a\,\sin t$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき $\cos t \geqq 0$ だから

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,\cos t$$

$\dfrac{dx}{dt} = a\,\cos t$ だから

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt = a\,\cos t\,dt,$$

定積分法

定積分の置換積分法

また

x が 0 から a まで動くとき t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動く

となる．だから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\,dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ だから

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$