

本日やること

① 積分法

- 復習：原始関数と不定積分
- 復習：不定積分の置換積分法
- 三角関数の有理関数の積分法
- 逆三角関数 (その 2)
- 二次無理関数の有理関数

積分法

原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$$F(x) \text{ が } f(x) \text{ の原始関数} \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ で表すと、すべての原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

で表される。これを $f(x)$ の不定積分とよび

$$\int f(x) dx$$

で表す。定数 C を積分定数という。要するに

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

積分法

主な関数の不定積分

$$(i) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(ii) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$(iii) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(iv) \int \sin x dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$(v) \int \cos x dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

今後積分定数 C は省略することにする。

積分法

不定積分の性質：線形性

不定積分の性質：線形性

$$(i) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(ii) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

積分法

不定積分の置換積分法

復習：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数を持ち、 $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t))\psi'(t) dt.$$

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t = \varphi(x)$ または $x = \psi(t)$ となる変数 t を考え、
 $\varphi(x)$ を t で、または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t = \varphi(x)$ を x で微分して $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x = \psi(t)$ を t で微分して $\frac{dx}{dt} = \psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx = \psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\int (t \text{ の関数}) dt$ の形になると、積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1] $\int \frac{1}{2x+3} dx$ を計算する。

$$2x+3 = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit, \heartsuit で置き換えて

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log |2x+3|$$

積分法

復習：いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数： $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ($P(x)$, $Q(x)$ は x の多項式) \rightarrow 前回やった。

三角関数の有理関数： $\frac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。 \rightarrow 本日もやる。

二次無理関数の有理関数： $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ など。 \rightarrow 本日もやる。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例] $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx$$

$2x = t$ とおくと $dx = \frac{dt}{2}$ だから

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin t = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

[例] $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x$ を使う。

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \int (1 - t^2)(-dt) \\ &= \frac{t^3}{3} - t = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x \end{aligned}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

$R(X, Y)$: X, Y の有理関数 $\Rightarrow \int R(\cos x, \sin x) dx$ は初等関数になる。
なぜなら

三角関数の有理関数の積分法

$$\tan \frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi)$$

によって積分変数を x から t に変換すると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{だから}$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

のように t の有理関数の積分に帰着されるからである。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[確かめ] $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割って $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$
2倍角の公式により

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1 + t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

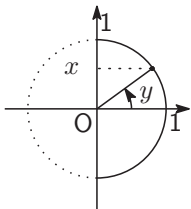
[例]

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \log |1+t| = \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right|\end{aligned}$$

積分法

逆三角関数 (その 2)

復習：逆三角関数 \sin^{-1} の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

であることを

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

でさだめる。

復習：逆三角関数 \sin^{-1} の導関数

a を正の定数とするとき

$$\frac{d}{dx} \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

二次無理関数の有理関数の積分

$R(X, Y)$ を X, Y の有理関数とすると、 $\int R(x, \sqrt{x \text{ の二次関数}}) dx$ は初等関数になる。

a を定数とすると

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2}$$

の場合に帰着されることが分かっている。
証明は省略する。重要な例を説明しよう。

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例] a が正の定数のとき

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

を示す

$x = a \sin t$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t \geq 0$ であり

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = a \cos t \quad \text{より} \quad dx = a \cos t dt$$

であるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= a^2 \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right) = a^2 \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

ところで

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[例]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

を示す.

$x = \tan t$, $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t > 0$ であり

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{より} \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

$s = \sin t$ とおくと $ds = \cos t dt$ だから

$$= \int \frac{ds}{1-s^2} = -\frac{1}{2} \log |s-1| + \frac{1}{2} \log |s+1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right|$$

$\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ だから

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \right| = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

[別解] $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと

$$x^2 + 1 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + 1 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ だから } dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

だから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \int dt = t$$

ところで

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ を } t \text{ について解くと } t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

積分法

二次無理関数の有理関数の積分

だから

$$= \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

となる。

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ を双曲線正弦関数といい $\sinh x$ で表す。