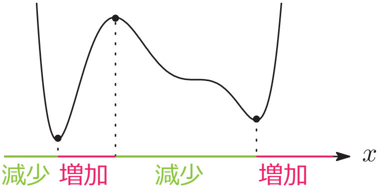
本日やること

1. 復習：関数の増減・極値
2. 関数の凹凸

関数の増減・極値

[目標]



関数がどこで極値をとるかを知りたい。

復習：関数の増減・極値

復習：関数の増減の判定条件

$f(x) : [a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能 とする。

(i) 区間 (a, b) 上で $f'(x) = 0 \iff$ 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は定数関数。

(ii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) > 0 \Rightarrow$ 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は狭義単調増加。

(iii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) < 0 \Rightarrow$ 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は狭義単調減少。

関数の増減・極値

復習：極値の必要条件

$f(x)$ が微分可能で, ある点 a で極値をとる。 $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$

復習：極値の十分条件

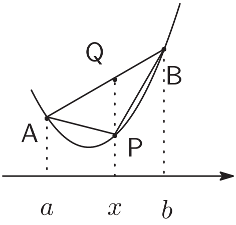
関数が微分可能で

(i) 点 a を境に単調増加から単調減少に変わるとき a で極大。

(ii) 点 a を境に単調減少から単調増加に変わるとき a で極小。

関数の凹凸

関数の凹凸の定義



(i) 関数 $f(x)$ が区間 I で下に凸であるというのは, $a, x, b \in I$ が $a < x < b$ をみたすとき, A$(a,\ f(a))$, P$(x,\ f(x))$ B$(b,\ f(b))$ とおくと P は線分 AB の下側にあること. つまり

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \ \ (= \text{Q の } y \text{ 座標})$$

(ii) またこれは AP の傾き $<$ PB の傾き といっても同じ。つまり

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

上に凸も同様に定義する。

関数の凹凸

[(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) の確かめ]

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{b-x}{b-a}(f(x)-f(a)) < \frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(x))$$

両辺に $\dfrac{b-a}{(b-x)(x-a)} > 0$ をかけて

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

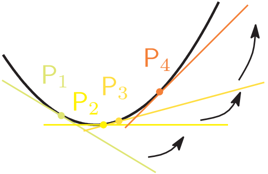
関数の凹凸

関数の凹凸の判定条件

$f(x)$ が I で 2 回微分可能であるとき,

(i) I で下に凸（上に凸） $\iff$ (ii) I で $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$)

[考え方]



じつは

(i) $\iff$ (iii) $f'(x)$ は単調増加

がわかる。

(iii) が (ii) と同値なのは既にやったことからわかる。

関数の凹凸

極値の十分条件

$a \in I$, $f(x)$ は I で 2 回連続微分可能であるとする．このとき $f(x)$ は

(i) $f'(0) = 0$, $f''(a) > 0$ ならば $x = a$ で極小値 $f(a)$ をとり，

(ii) $f'(0) = 0$, $f''(a) < 0$ ならば $x = a$ で極大値 $f(a)$ をとる。

例題

[例題]　$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ の増減・凹凸・極値を調べる。

[Step 1]　導関数の零点・符号を調べる。

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 1$ のみ。このほかの点では極値をとらない。

$x < 0$　では　$x^2 > 0, x-1 < 0$　だから $f'(x) < 0$　だから狭義単調減少

$0 < x < 1$ では　$x^2 > 0, x-1 < 0$　だから $f'(x) < 0$　だから狭義単調減少

$1 < x$　では　$x^2 > 0, x-1 > 0$　だから $f'(x) > 0$　だから狭義単調増加

例題

[Step 2] 2 階導関数の符号を調べる。

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

$f''(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, \dfrac{2}{3}$。

$x < 0$ では $x < 0, 3x - 2 < 0$ だから $f''(x) > 0$ だから下に凸

$0 < x < \dfrac{3}{2}$ では $x > 0, 3x - 2 < 0$ だから $f''(x) < 0$ だから上に凸

$\dfrac{3}{2} < x$ では $x > 0, 3x - 2 > 0$ だから $f''(x) > 0$ だから下に凸

例題

[Step 3]　増減表にまとめる.

x	$x<0$	0	$0<x<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{16}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$
		変曲点		変曲点		極小	

[Step 4] グラフの概形を書く