

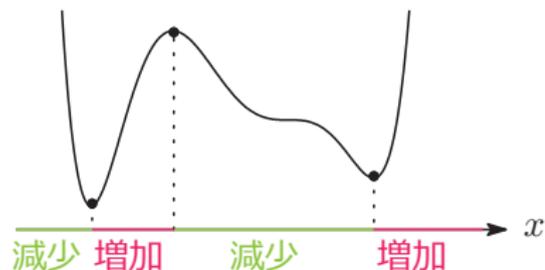
本日よりこと

① 関数の増減・極値

- 関数の増減
- 平均値の定理
- 関数の増減の判定条件
- 関数の極値
- 関数の凹凸

関数の増減・極値

[目標]

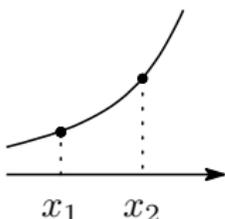


関数がどこで極値をとるかを知りたい。

関数の増減・極値

関数の増減の定義

[単調増加]

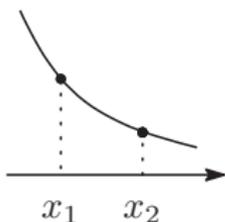


関数 $f(x)$ が区間 I で**単調増加**であるとは
 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
であること。

狭義単調増加であるとは

$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
であること。

[単調減少]



関数 $f(x)$ が区間 I で**単調減少**であるとは
 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
であること。

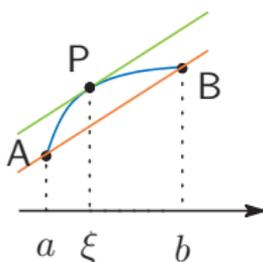
狭義単調減少であるとは

$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
であること。

関数の増減・極値

[準備]

Lagrange の平均値の定理

 $f(x) : [a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。[考え方] $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ とおく。

$$\text{AB の傾き} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{接線の傾き} = f'(\xi),$$

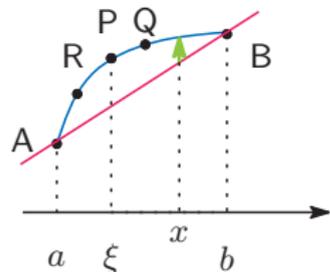
だから AB と平行な接線を持つ点 $P(\xi, f(\xi))$ があるということ。

この定理は微分係数で関数値の変動を知るために重要である。

微分法の実用

関数の増減・極値

[確かめ]

じつは ξ は

$$F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right\}$$

が最大値 (または最小値) をとる点である。なぜなら (最大値をとる場合) $h > 0$ に対して $F(\xi) \geq F(\xi \pm h)$ であるがこれから

$$(PQ \text{ の傾き} =) \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \quad (= PR \text{ の傾き})$$

$$\text{ここで } h \rightarrow 0 \text{ とすると } f'(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(\xi)$$

$$\text{すなわち } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{最小値の場合も同様。}$$

関数の増減・極値

関数の増減の判定条件

$f(x) : [a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能 とする。

- (i) 区間 (a, b) 上で $f'(x) = 0$
 \iff 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は定数関数。
- (ii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) > 0$
 \Rightarrow 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は狭義単調増加。
- (iii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) < 0$
 \Rightarrow 区間 (a, b) 上で $f(x)$ は狭義単調減少。

微分法の応用

関数の増減・極値

[⇒ の確かめ]

$a < x_1 < x_2 < b$ を任意にとる。Lagrange の平均値の定理により

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad a < \xi < b$$

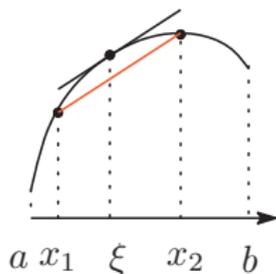
となる ξ がある。

(i) のとき、 $f'(\xi) = 0$ だから $f(x_1) = f(x_2)$ 。

(ii) のとき、 $f'(\xi) > 0$ だから $f(x_1) < f(x_2)$ 。

(iii) のとき、 $f'(\xi) < 0$ だから $f(x_1) > f(x_2)$ 。

⇐ は明らか。



関数の増減・極値

極値の定義

$f(x)$ が点 a で極大になる

$\iff a$ の近所で最大になる

\iff ある $\delta > 0$ があって $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$

極小も同様。

極大値と極小値をあわせて極値という。

関数の増減・極値

極値の必要条件

$f(x)$ が微分可能で、ある点 a で極値をとる。

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

[確かめ] a で極大になるとする。 $x \rightarrow a, x \neq a$ で $f(x) < f(a)$ だから

$$x \rightarrow a + 0 \text{ のとき } 0 > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$$

だから $f'(a) \leq 0$

$$x \rightarrow a - 0 \text{ のとき } 0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$$

だから $f'(a) \geq 0$

あわせて $f'(a) = 0$

関数の増減・極値

極値の十分条件

関数が微分可能で

- (i) 点 a を境に単調増加から単調減少に変わるとき a で極大。
- (ii) 点 a を境に単調減少から単調増加に変わるとき a で極小。

微分法の応用

関数の増減・極値

[例題] $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ の増減・極値を調べる。そのため 導関数の零点・符号を調べる。

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 1$ のみ。このほかの点では極値をとらない。

$x < 0$ では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$0 < x < 1$ では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$1 < x$ では $x^2 > 0, x - 1 > 0$ だから $f'(x) > 0$

増減表にまとめると

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↗

$x = 1$ で極小値 -1 をとる。

