本日やること

1. 高階導関数
   - 主な関数の高階導関数
2. 近似多項式
   - Maclaurin 近似多項式
   - Taylor 近似多項式
   - 主な関数の近似多項式
3. 級数展開

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義

1. $f(x)$ が 区間 I で連続微分可能であるとは, 導関数 $f'(x)$ が連続であること。

2. $f(x)$ が 区間 I で 2 階微分可能であるとは, 導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であること。このとき 関数 $x \mapsto (f')'(x)$ を, 関数 $f(x)$ の 2 階導関数といい, 記号

$$f'', \quad f''(x), \quad (f(x))'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

などで表す.

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義 (続き)

3. 同様に $n = 1, 2, \cdots$ にたいして n 階微分可能であること, n 階導関数を定め, 記号

$$f^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad (f(x))^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

などで表す.

4. $f(x)$ が n 回連続微分可能であるとは, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続であること。

微分法

主な関数の高階導関数

主な関数の高階導関数

$f(x) = x^{\alpha}$, (α は実数の定数) のとき

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}$$

$f(x) = e^{x}$ のとき　$f^{(n)}(x) = e^{x}$

$f(x) = \log|x|$ のとき $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

$f(x) = \sin x$ のとき　$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

$f(x) = \cos x$ のとき　$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

微分法の応用

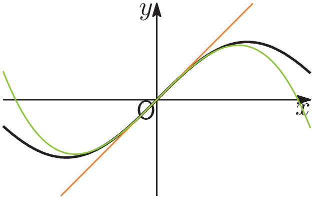
近似多項式

[目標] 関数 $y = f(x)$ を $x = 0$ の近くで x の多項式

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2 \cdots \text{ は定数})$$

で近似したい。そのため高階微分係数を利用する。

[例：$\sin x$ の近似多項式]



$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq 0$ (0 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ (1 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x - \dfrac{x^3}{6}$ (3 次近似)

微分法の応用
近似多項式

準備：多項式の係数

x の n 次多項式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

に対して

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ.

微分法の応用
近似多項式

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \\
P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
P''(x) &= 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\
P'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \\
&\vdots \\
P^{(n)}(x) &= n! a_n
\end{aligned}
$$

だから $x = 0$ を代入すると

$$
P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2! a_2, \quad P'''(0) = 3! a_3, \cdots \quad P^{(n)}(0) = n! a_n
$$

微分法の応用

近似多項式

Maclaurin 近似多項式の定義

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき、x の n 次多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式という.

(A) は

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P''(0) = f''(0), \cdots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。
(B) により

$$x \fallingdotseq 0 \ \Rightarrow \ f(x) \fallingdotseq P(x) \quad \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Macraulin の定理

$f(x)$: 区間 (a,b) ($a<0<b$) で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x)=f(x)-P(x), \quad a<x<b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

と表される. ここで θ ($0<\theta<1$) は x と n で決まる適当な実数。

f が $n+1$ 回連続微分可能ならば $\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+1}(x)}{x^n}=0$ となり $R_{n+1}(x)$ は非常に小さい誤差であるといえる。

微分法の応用

近似多項式

Taylor 近似多項式

関数 $f(x)$ が n 回微分可能とし、a を定義域内の点とするとき x の n 次多項式

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{2!}(x-a)^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の $x = a$ における n 次 Taylor 近似多項式という.

(A) は

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ P''(a) = f''(a), \cdots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。
(B) により

$$x \fallingdotseq a \ \Rightarrow\ f(x) \fallingdotseq P(x) \quad \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Taylor の定理

$f(x)$: a を含む開区間で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の $x=a$ における n 次 Taylor 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表される. ここで θ $(0 < \theta < 1)$ は x と n で決まる適当な実数。

微分法の応用

近似多項式

e^x の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = e^x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

である。

[確かめ]　$f(x) = e^x$ とおくと,

$f^{(k)}(x) = e^x$,　だから　$f^{(k)}(0) = 1$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用

近似多項式

$\sin x$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \sin x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は $n = 2k-1$ または $2k$ のとき

$$P_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

である。

[確かめ]　$f(x) = \sin x$ とおくと，$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$，　だから

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ は偶数} \\ 1, & k = 1, 5, 9, \cdots \\ -1, & k = 3, 7, 11, \cdots \end{cases}$$

これを (A) に代入すればよい。

微分法の応用
近似多項式

$\cos x$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \cos x$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は $n = 2k+1$ または $2k$ のとき

$$P_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

である。

各自確かめよ。

微分法の応用

近似多項式

$\log(1+x)$ の Maclaurin 近似多項式

$f(x) = \log(1+x)$ の n 次の Maclaurin 近似多項式は

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

である。

微分法の応用

級数展開

Taylor 級数・Maclaurin 級数

関数 $f(x)$ の性質が良いときは近似多項式の誤差 R_{n+1} が $n \to +\infty$ のとき 0 に近づくので

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad a \text{ は定数}$$

としてよい。これを Taylor 級数という。とくに $a = 0$ としたもの

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を Maclaurin 級数という。

微分法の応用

主な関数の Maclaurin 級数展開

主な関数の Maclaurin 級数

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n$$