本日やること

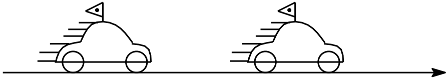
1. 初等関数の導関数
   - 三角関数の導関数
   - 逆三角関数
   - パラメータ表示された関数とその微分法

2. 高階導関数
   - 主な関数の高階導関数

復習：微分係数・導関数

復習：微分係数・導関数

時刻　a　$a+h$



座標　$f(a)$　$f(a+h)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a における微分係数　a は定数

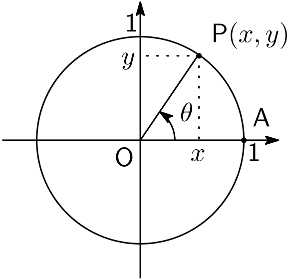
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導関数　x は変数

三角関数

定義

復習：三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$ ：余弦

$\sin\theta = y$ ：正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ：正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

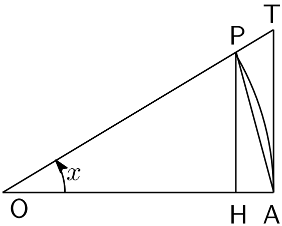
また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という．

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の基本極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



[確かめ] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x\to +0$ とする.

PH$=\sin x$, 弧 $\overset{\frown}{\text{PA}}=x$, TA $=\tan x$

△OPA, 扇型 OPA, △OTA の面積を比較

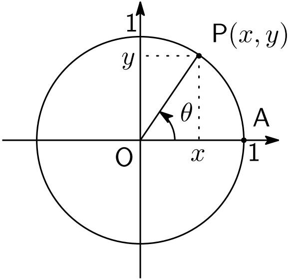
$$0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x\ \left(=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$\cos x\to 1$ であるからはさみうちの原理により $\frac{\sin x}{x}\to 1$　$x\to -0$ の場合も同様.

初等関数の導関数
三角関数の導関数

復習　三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

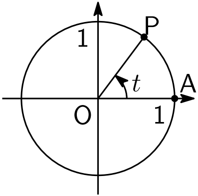
と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t = 0$ のとき P=A

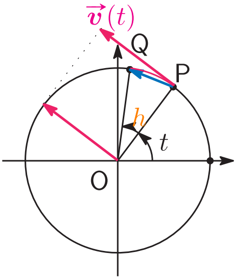
ならば

時刻 t の P の座標 $= (\cos t, \sin t)$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル



P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。ただし

P：時刻 t の点，　Q：時刻 $t+h$ の点

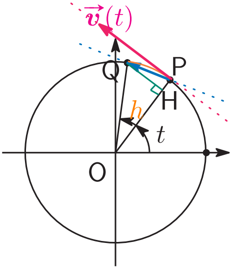
このとき

$$\vec{v}(t) = \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdots (\star)$$

$$= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star 2)$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数



[確かめ]　(i) $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で正の回転の向きである．なぜなら直線 PQ は $h \to 0$ のとき接線に近づくから。

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは 1 である．なぜなら

$$\frac{\mathrm{QH}}{h} = \frac{\sin h}{h} \leqq \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} \right| \leqq \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{h} = 1$$

かつ $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ だから。

(i), (ii) より $\vec{v}(t)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから $(\star)$ がわかる.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

一方, $\mathsf{P}(\cos t, \sin t)$, $\mathsf{Q}(\cos(t+h), \sin(t+h))$ だから

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{\mathsf{PQ}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(t+h) - \cos t, \sin(t+h) - \sin t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(\cos(t+h) - \cos t}{h}, \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\cos(t+h) - \cos t}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} \right) \\ &= ((\cos t)', (\sin t)')\end{aligned}$$

でもあるから $(\star 2)$ も成り立つ。$(\star)$, $(\star 2)$ を比較して

$((\cos t)', (\sin t)') = (-\sin t, \cos t)$

同様にして, 等速円運動に限らず時刻 t での座標が $(f(t), g(t))$ である動点 P の速度ベクトルは成分表示すると

$$\vec{v}(t) = (f'(t), g'(t))$$

となることがわかる。

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の導関数

(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$,

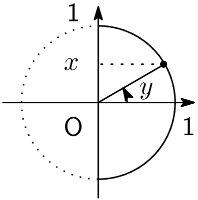
(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[確かめ]　前節より明らか。

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

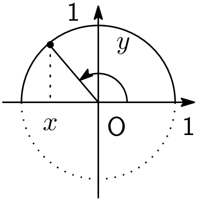
逆三角関数の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$\iff$$

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = \cos^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

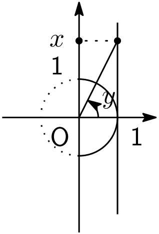
$$\iff$$

$$x = \cos y, \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の定義



$$y = \tan^{-1} x, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \tan y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の導関数

(i) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(ii) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(iii) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(i) の確かめ]　$y = \sin^{-1} x$ とおくと $x = \sin y$.

$$-1 < x < 1 \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow \cos y > 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\sin y = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(iii) の確かめ]　$y = \tan^{-1} x$ とおくと $x = \tan y$.

$$\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ だから } \cos y > 0$$

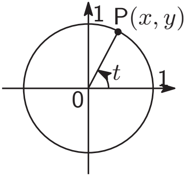
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法



I は区間, 関数 $f(t)$, $g(t)$ はともに連続とする．点 P の座標 (x,y) が

$$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (t\in I)\qquad \cdots(\star)$$

を満たすとき, t が変化したときの点 P の軌跡は平面内の曲線を表す．これを曲線のパラメータ (または媒介変数) 表示といい, 変数 t をパラメータ (または媒介変数) という．
例えば

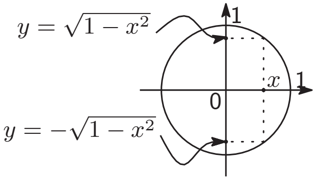
$$x=\cos t,\quad y=\sin t\quad (t\in I)\qquad \cdots(\star 2)$$

は図のような単位円のパラメータ表示である。

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法

区間 I を適当にとると, x に対して $(\star)$ を満たす t, y がただ一つ決まることがあり, これによって関数 $x \mapsto y$ が決まる. これをパラメータ表示された関数という.



$(\star 2)$ の場合は

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

である。

初等関数の導関数

パラメータ表示された関数とその微分法

パラメータ（媒介変数）表示された関数の微分法

関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ および f の逆関数 $t = f^{-1}(x)$ が存在して，すべて微分可能であるとする．このとき関数 $x \mapsto y$ も微分可能で，$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ である点で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

である．

証明　$x \mapsto y$ は合成関数 $y = g(f^{-1}(x))$ であるから逆関数の微分法と合成関数の微分法を組み合わせれば証明できる． $\square$

微分法

高階導関数

[復習：導関数] $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で定義される。記号

$$f',\quad f'(x),\quad (f(x))',\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx}$$

も使う。

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義

1. $f(x)$ が 区間 I で連続微分可能であるとは，導関数 $f'(x)$ が連続であること。

2. $f(x)$ が 区間 I で 2 階微分可能であるとは，導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であること。このとき 関数 $x \mapsto (f')'(x)$ を，関数 $f(x)$ の 2 階導関数といい，記号

$$f'', \quad f''(x), \quad (f(x))'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

などで表す．

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義 (続き)

3. 同様に $n = 1, 2, \cdots$ にたいして n 階微分可能であること, n 階導関数を定め, 記号

$$f^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad (f(x))^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

などで表す.

4. $f(x)$ が n 回連続微分可能であるとは, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続であること。

微分法

主な関数の高階導関数

べき関数の高階導関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\alpha}, \text{（}\alpha \text{ は実数の定数 ）のとき} \\
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

例えば $f(x) = x^4$ のとき

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 4\cdot 3x^2, \quad f'''(x) = 4\cdot 3\cdot 2x, \quad f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$$

微分法

主な関数の高階導関数

指数関数・対数関数の高階導関数

(i) $f(x) = e^x$ のとき

$$f^{(n)}(x) = e^x, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

(ii) $f(x) = \log x \ (x > 0)$ のとき

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$$

(i) は $(e^x)' = e^x$ だから。　(ii) は

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$(\log x)'' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}$$

$$(\log x)''' = ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$\vdots$$

だから

微分法

主な関数の高階導関数

三角関数の高階導関数

$$f(x)=\sin x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f(x)=\cos x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), \ (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\sin x \text{ のとき}$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin t \quad \left(x+\frac{\pi}{2}=t \text{ とおいた}\right)$$
$$f''(x)=\frac{d}{dx}\sin t=\frac{d}{dt}\sin t\frac{dt}{dx}=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\times 1=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$

これをくりかえす。$\cos x$ のときも同様。