本日やること

1. 微分係数・導関数
    - はやさと速度
    - 微分係数・導関数の定義
    - 微分係数とグラフの接線

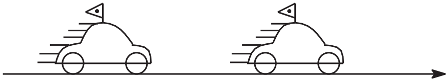
微分係数・導関数

はやさと速度

はやさと速度

$$\text{はやさ} = \frac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$$ を精密化する

時刻　t　　$t+h$



座標　$f(t)$　　$f(t+h)$

(時刻 t から $t+h$ までの) 平均の速度 $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

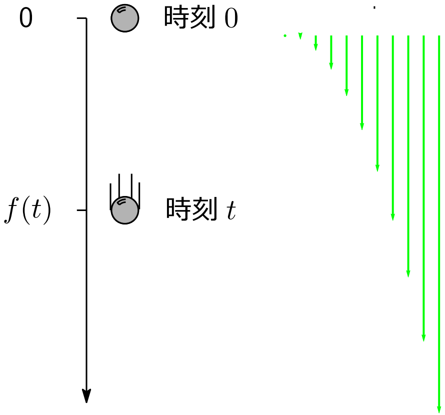
負の値も取りうることに注意

(時刻 t の) 瞬間の速度を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で定める。

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]

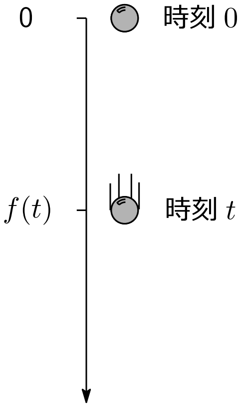


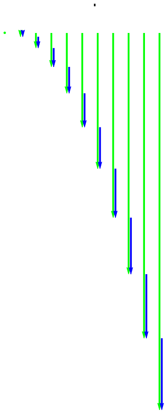
$f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (m)
(g：重力加速度)

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g：重力加速度)

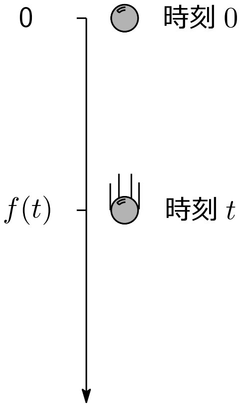
平均の速度

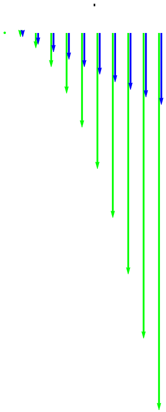
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

(g : 重力加速度)

平均の速度

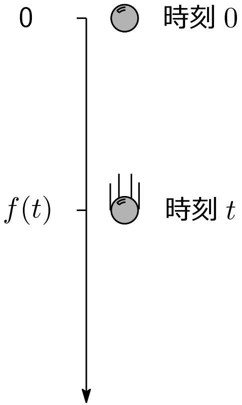
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

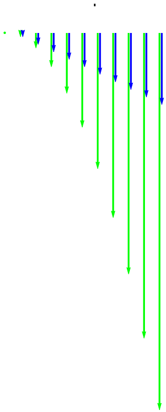
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ (\mathrm{m})$$

(g : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

微分係数・導関数

運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は t に比例するとは言えないからこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

微分係数・導関数

微分係数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x=a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x=a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots \text{で表す. つまり}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは, 区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を, 関数 $f(x)$ の導関数といい, 記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ 点 a で連続

逆は成り立たない。

[確かめ]

$x \to a$ とするとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \to f'(a) \times 0$$

だから $f(x) \to f(a)$

微分係数・導関数

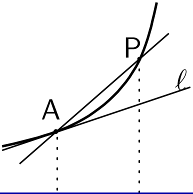
微分係数とグラフの接線

微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 A$(a, f(a))$ で接線を持つ.

ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



[確かめ] P$(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star)$

ℓ の傾き $= f'(a) \cdots (\star\star)$

$h \to 0$ とすると $(\star) \to (\star\star)$ だから AP$\to$

微分係数・導関数

微分係数とグラフの接線

[例 4.2] 曲線 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線を求める。

$f(x) = x^2$ とおく。$x = 1$ における微分係数は

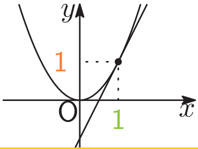
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから h で約分ができて

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

接線は $(1, 1)$ を通って傾き $f'(1) = 2$ の直線であるから方程式は

$$y - 1 = 2(x - 1)$$



整理して