ガイダンス

解析基礎

必修　2 単位

内容：

- 初等関数の極限
- 微分法
- 積分法

実施方法：

週 2 回 14 回　月曜 3・4 時限　金曜 3・4 時限

毎回講義と問題演習をします。演習問題の解説を小山のホームページ
http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/
にアップロードしますので正解確認をしたうえで次回提出してください。

最後に期末試験をします。

試験と演習問題の提出を見て成績を付けます。演習の比率が重いので必ず提出してください。

本日やること

1. 関数の極限
    - 関数の極限の定義
    - 関数の極限の性質
2. 連続関数
    - 連続関数の定義
    - 連続関数の性質
    - べきと指数法則
3. 指数関数
    - 指数関数の定義
    - グラフ
    - 性質
4. 対数関数
    - 対数の定義
    - 対数の性質
    - 対数関数の定義

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad$「$x$ を $x \neq a$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.
$f(x)$: 関数, α : 定数　のとき

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は極限 (値) α に収束する」とは

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $f(x)$ は限りなく α に近づく」こと

記号 : $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, または $f(x) \to \alpha$, $(x \to a)$　で表す。

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は発散する」 とは $\Leftrightarrow$「どんな α にも収束しない」こと

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は正の (負の) 無限大に発散する」とは

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $\pm f(x)$ が限りなく大きくなる」こと

記号 : $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, または $f(x) \to \pm\infty$, $(x \to a)$　で表す。

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \pm 0 \quad \Leftrightarrow \quad$「$x$ を $x > a$ $(x < a)$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.

$a = 0$ のときは $x \to \pm 0$ と書く

$x \to \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad$「$\pm x$ を 限りなく大きくする」こと.

このとき

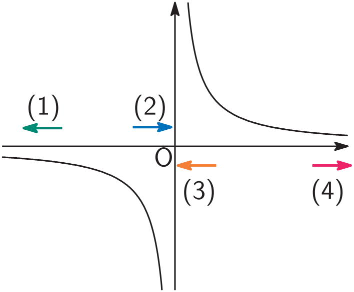
$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

も同様に定める。片側極限という。

関数の極限

関数の極限の例

[例 3.6]



$$(1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-0,$$

$$(2)\ \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$(3)\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$(4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=+0$$

関数の極限

関数の極限の性質

定理 3.9　関数の極限の性質

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とするとき,

(i) $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　　(k は定数)

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　(ただし, $\beta \neq 0$)

(v) $f(x) \leqq g(x),\ (n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \alpha \leqq \beta$.

(vi) $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x),\ (n = 1, 2, \cdots),\ \alpha = \beta$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) = \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

関数の極限

関数の極限の性質

[例]

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

関数の極限

関数の極限の性質

[注意 1.] 定理は $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ のときも正しい。
[注意 2.]

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

と考えると $\alpha, \beta = 0, \infty$ のときも正しい。
[注意 3.] 形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限 (不定型の極限) は, 場合により結果が異なるので要注意。

関数の極限

関数の極限の性質

[例] $\dfrac{0}{0}$ 型不定形

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

は不可。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$x\to 1$ は x を $x\neq 1$ の状態で 1 に近づけること意味するから $(x-1)\neq 0$ で約分できるので

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$: 区間 I で定義された関数, $a \in I$ のとき

(i) $f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 連続 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(a が区間の端点であるときは片側極限値を考える.)

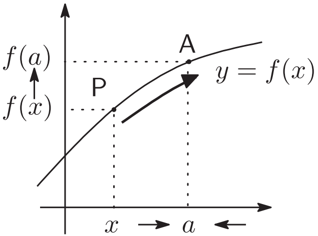
(ii) $f(x)$ が 区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が 区間 I の各点で連続

[連続でない関数の例] 教科書 58 ページを見よ。

連続関数

連続関数の性質

[連続関数のグラフ]



A$(a, f(a))$, P$(x, f(x))$ とする。
$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \to a \;\Rightarrow\; f(x) \to f(a) \Rightarrow \; \text{P} \to \text{A}$$

だからグラフは点 A でつながっている。

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 $\Rightarrow$

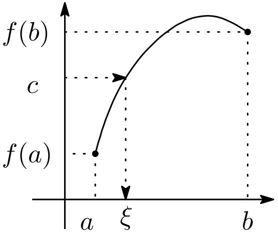
$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母} \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

だから多項式関数, 有理関数 は定義域で連続。
指数関数, 三角関数も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であり，さらに $f(a) < f(b)$ であるならば，$f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

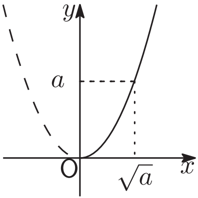
$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a,b]$ に少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > f(b)$ であるときも同様である．

連続関数

連続関数の性質

[例] 平方根の存在

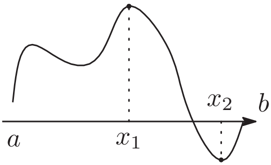


連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

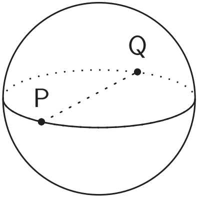
関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する.



連続関数

連続関数の性質

[例題]



地球表面の気温分布は連続であるとする。赤道上の点 P とその裏側の点 Q で、気温が一致するものがあることを説明せよ。

指数関数

復習：累乗・累乗根

累乗・自然数べき・指数法則

$a \geqq 0$: 定数　$n = 1, 2, \cdots$ (自然数) とする.

$$a^n = \overbrace{a \times \cdots \times a}^{n}$$

を a の累乗あるいは自然数べきという. また, この n を a^n の指数という.
自然数冪は指数法則

$$a^n a^m = a^{m+n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots$$

を満たす。

指数関数

復習：累乗・累乗根

累乗根

$a \geqq 0$ に対し

$$x \geqq 0 \text{ かつ } x^n = a$$

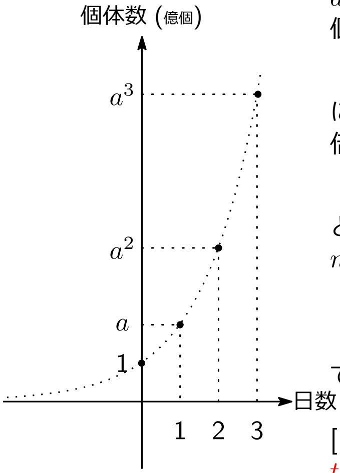
を満たす実数 x がただ 1 つ存在することが知られている。
この x を a の（非負の）$\boldsymbol{n}$ **乗根**といい $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ で表す．即ち，

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

である．
$n = 2$ のときは単に $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ で表す．

指数関数

微生物の増殖



$a > 0$ とする。分裂して増殖することにより個体数が

1 日で a 倍

になる微生物がある。「一定時間には一定の倍率で」増殖すると考えられるから

n 日後 a^n 倍

となるので初めの個体数を 1 (億個) とすると n 日後の個体数は

$$a^n \text{ (億個)}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

である。

[目標] 増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

有理数べき

有理数べき

さて a を正の定数, $m, n = 1, 2, \cdots$ とするとき

$$a^0 = 1 \ (0\text{ の指数}), \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (\text{負の整数指数}),$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \ (\text{正の分数指数}), \quad a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} \ (\text{負の分数指数})$$

と定め, これらを a の有理数べきという.
これは実数 $a > 0$, $b > 0$ と有理数 r, s に対して指数法則

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad (a^r)^s = a^{rs}, \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

を満たす. 逆に指数法則を満たすように有理数べきを決める方法はこれしかない事がわかっている.

指数関数

実数べきと指数関数

実数べきの定義

実数 t に対してこれに近づいていく有理数の列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ がある．このとき，$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \cdots$ が定義されるが，これらもある値に近づいていくことが知られている。この値を

$$a^t$$

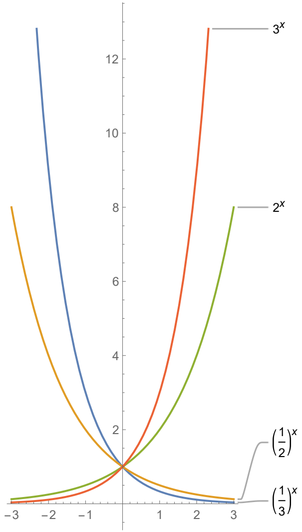
と定める。これを実数べきという。

指数関数の定義

$a > 0$, $a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．
定義域は実数全体である．

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は等比数列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから, x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1.　指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である. また,

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が

狭義単調増加であるとは $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$ であること。

狭義単調減少であるとは $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a>0$, $a \neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \quad \Longleftrightarrow \quad a^p = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数

対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

注意すること

底の条件：$a > 0,\ a \neq 1$

真数条件：$M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと 定義より

$$\Leftrightarrow \ 2^p = \sqrt{32}$$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M > 0$, $N > 0$, k, x, p を実数とするとき

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数
例

[例]

$X = \log_a x$, $Y = \log_a y$, $Z = \log_a z$ とおくと

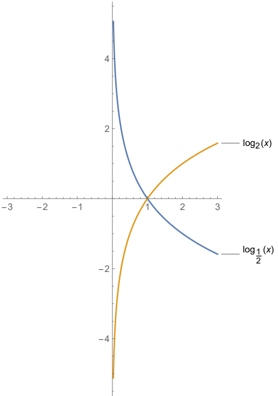
$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{z^3}} &= \log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z \\ &= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

指数関数
定義

対数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．関数 $f(x) = \log_a x$ を，a を底とする x の対数関数とよぶ．



定義域は 正の実数全体 $(0, \infty)$，値域は 実数全体 $\mathbb{R}$ である．また，

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加，

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少．

指数関数の逆関数である。