ガイダンス

解析基礎

必修　2 単位

内容：

- 初等関数の極限
- 微分法
- 積分法

実施方法：

週 2 回 14 回　月曜 3・4 時限　金曜 3・4 時限

毎回講義と問題演習をします。演習問題の解説を小山のホームページ
http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/
にアップロードしますので正解確認をしたうえで次回提出してください。

最後に期末試験をします。

試験と演習問題の提出を見て成績を付けます。演習の比率が重いので必ず提出してください。

本日やること

1. 数列の極限
   - 数列の極限の定義
   - 数列の極限の性質
   - ± 0, $\pm\infty$ を含む極限
   - 不定型の極限
   - 有界性・単調性
   - 有界な単調数列
   - 等比数列の極限
2. 三角関数
   - 三角比
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 定義
   - グラフの作図

数列の極限

数列の極限の定義

数列の極限の定義

$\{a_n\}$: 数列， α : 定数　のとき

「数列 $\{a_n\}$ は極限 (値) α に収束する」とは

$\Leftrightarrow$ 「n が限りなく大きくなる時 a_n は限りなく α に近づく」こと

記号 : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，または $a_n \to \alpha$, $(n \to \infty)$　で表す。

「数列 $\{a_n\}$ は発散する」とは $\Leftrightarrow$ 「どんな α にも収束しない」こと

「数列 $\{a_n\}$ は正の (負の) 無限大に発散する」とは

$\Leftrightarrow$ 「a_n $(-a_n)$ が限りなく大きくなる」こと

記号 : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$，または $a_n \to \pm\infty$, $(n \to \infty)$　で表す。

[例] $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$,　$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$,　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$　は明らかでしょう。

数列の極限

数列の極限の性質

定理 3.3　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき,

(i) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　(k は定数)

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　(ただし, $\beta \neq 0$)

(v) さらに $a_n \leqq b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ のときは $\alpha \leqq \beta$.

(vi) $a_n \leqq c_n \leqq b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$, $\alpha = \beta$
のときは $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

数列の極限

数列の極限の計算方法

[例] これらを組み合わせて,

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to a, b_n \to b, c_n \to c, d_n \to d$$

ならば

$$\frac{3a_n - 2b_n}{c_n(d_n - 2)} \to \frac{3a - 2b}{c(d-2)}$$

などとできる。例えば

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{n \times \frac{1}{n}}{(2n-1) \times \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\left(\text{ここで } \frac{1}{n} \to 0 \text{ だから}\right)$$

$$\to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

数列の極限

$\pm 0,\ \pm\infty$ を含む極限

$\boldsymbol{n} \to \infty$ のとき

「$a_n > 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +0$ または $a_n \to +0$ で表す。

「$a_n < 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -0$ または $a_n \to -0$ で表す。

[例] $a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \to +0$ が分かっている。

[例] $a_n \to$ 正の数$, b_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to +0$ が分かっている。

このことから $\dfrac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0$ と約束すると定理 3.3 の (iv) は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{+\infty} = 0$$

となるので $\alpha > 0,\ \beta = +\infty$ の時も成り立つ。

同様に

数列の極限

±0, ±∞ を含む極限

±0, ±∞ を含む極限の約束

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

[例] $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{+\infty} = +0$$

$$\frac{1}{2n-1} \to \frac{1}{2 \times (+\infty) - 1} = \frac{1}{(+\infty) - 1} = \frac{1}{(+\infty)} = +0$$

数列の極限

不定型の極限

不定型の極限

形式的に

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty-\infty,\cdots$$

の形になる極限は，場合により結果が異なるのでこの計算はやってはいけない。 これらを不定形の極限という。

[例] $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定型の極限は場合によって異なる。

$$\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{2n^2-1}=\frac{1}{2n-\frac{1}{n}}\to\frac{1}{+\infty-0}=0$$

数列の極限

有界性・単調性

有界な数列

数列 $\{a_n\}$ が**上に (下に) 有界**

$\Leftrightarrow$ ある数 M があって $a_n \leqq M$ ($\geqq M$) $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が**有界**

$\Leftrightarrow$ 上に有界かつ下に有界

単調な数列

数列 $\{a_n\}$ が**単調増加 (単調減少)**

$\Leftrightarrow$ $a_n \leqq a_{n+1}$ $(a_n \geqq a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が**狭義単調増加 (狭義単調減少)**

$\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

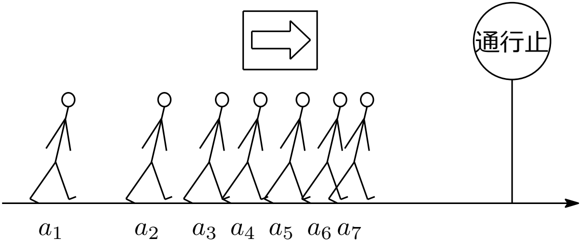
数列の極限

有界な単調数列

有界な単調数列の極限

上に有界な単調増加数列は収束する．また，下に有界な単調減少数列 は収束する．

もちろん有界でない単調数列は ∞ か $-\infty$ に発散する．しかし，有界ならば必ず収束することを証明するためには実数の連続性が必要である．ここでは証明は省略する．



数列の極限

等比数列の極限

等比数列の単調性・極限

等比数列 $\{r^n\}$ は

(i)

$$r > 1 \ \Rightarrow \ \text{狭義単調増加}$$

$$0 < r < 1 \ \Rightarrow \ \text{狭義単調減少}$$

$$r < 0 \ \Rightarrow \ \text{単調でない}$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty \text{ に発散} & (\ r > 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (\ r = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (\ r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

数列の極限

等比数列の極限

[確かめ] $r > 1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1} > r^n$ だから狭義単調増加。

$a = r - 1 > 0$ とおくと

$$r^n = (1+a)^n = 1 + na + \cdots > 1 + na$$

である。ところで $n \to \infty$ とするとき $1 + na \to +\infty$ だから $r^n \to +\infty$.

$0 < r < 1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1} < r^n$ だから狭義単調減少。

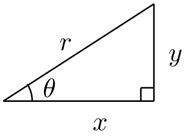
$b = r^{-1}$ とおくと $b > 1$ であり $b^n \to +\infty$.

$$r^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to \frac{1}{+\infty} = +0$$

三角関数

三角比

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

θ の正弦を $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

θ の余弦を $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

θ の正接を $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

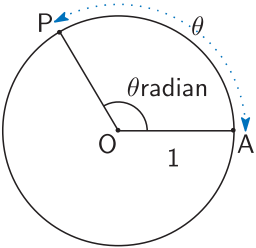
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角関数

弧度法

弧度法の定義



図のような半径 1 の円において

$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ radian (ラジアン)

であるとは

円弧 AP の長さ $= \theta$

であること

このような角の大きさのはかり方を弧度法という。普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると,

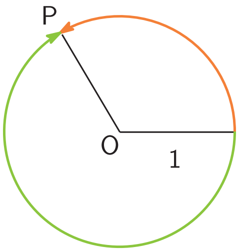
1 回転 $= 360°$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$ だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360°, \quad \pi \text{ (rad)} = 180°, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90°, \cdots$$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

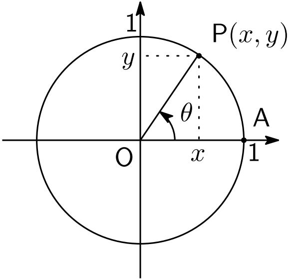
であること．ただし

正の向きの回転 ： 左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転 ： 右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x, y) とするとき

$$\cos\theta = x \text{ : 余弦}$$

$$\sin\theta = y \text{ : 正弦}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \text{ : 正接}$$

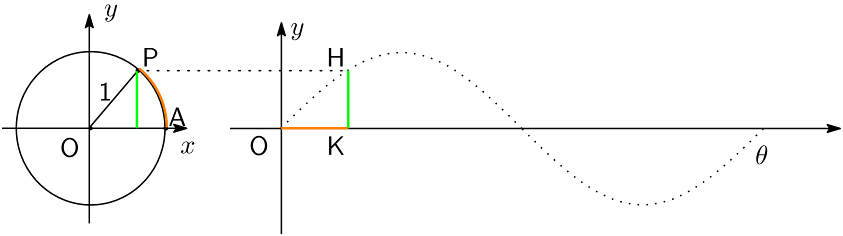
と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

三角関数

グラフの作図

[考え方]



1. x, y 平面に原点中心の半径 1 の円を書き, 円周上に点 A$(1, 0)$, P(x, y) をとる。∠AOP$=\theta$ とすると三角関数の定義により, (弧 AP の長さ)$=\theta$, $y=\sin\theta$ となる。

2. 三角関数 $y=\sin\theta$ は θ に対して y を対応させる関数であるから, そのグラフは, θy 平面に点 H(θ, y) をとるとき, P を円周上で動かしたとき H がえがく曲線である。

3. 上の図を用いて $y=\sin\theta$ のグラフを書くには, K$(\theta, 0)$ とするとき, (弧 AP の長さ)=OK $(=\theta)$ となるように点 P をとらなければならない。