解析基礎 小テスト 解説

1. (1) $y = (2x-1)^4$ の導関数を計算しよう．$2x-1=t$ とおくと $y=(2x-1)^4$ は

$y = t^4 \cdots (a)$ と $t = 2x-1 \cdots (b)$

の合成関数となる．

(a) により $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$, 　(b) により $\dfrac{dt}{dx} = 2$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = 4t^3 \times 2 = 8t^3 = 8(2x-1)^3$$

2. 次の関数の導関数を計算せよ．

(1) $y = \sqrt{3x+2}$ のとき

$3x \times\ 2 = t \cdots (a)$ 　とおくと，　$y = \sqrt{t} \cdots (b)$ 　である．

(b) より $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\sqrt{t} = \dfrac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$,

(a) より $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ である．

$y = \sqrt{3x+2}$ は $y = \sqrt{t}$ と $t = 3x+2$ の合成関数だから，合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{t}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

である．

(2) $y = x\sqrt{3x+2}$ の導関数を求めるには積の微分法を使う．

$y' = (x)'\sqrt{3x+2} + x\left((\sqrt{3x+2}\right)'$

(1) の結果を使って

$$= \sqrt{3x+2} + x \times \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{2(3x+2)}{2\sqrt{3x+2}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{9x+4}{2\sqrt{3x+2}}$$

(3) $y = (x^2+4)^4$ のとき

$x^4 + 4 = t \cdots (a)$ 　とおくと，　$y = t^4 \cdots (b)$ 　である．

(b) より $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}t^4 = 4t^3$,

(a) より $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2+4) = 2x$ である．

$y = (x^2+4)^4$ は $y = t^4$ と $t = x^2+4$ の合成関数だから，合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = 4t^3 \times 2x = 8x(x^2+4)^3$$

である．

(4) $y=\sqrt{x^2+4}$

$x^2+4=t\cdots(a)$　とおくと，　$y=\sqrt{t}\cdots(b)$　である．

(b) より　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$,

(a) より　$\dfrac{dt}{dx}=2x$ である．

$y=\sqrt{x^2+4}$ は $y=\sqrt{t}$ と $t=x^2+4$ の合成関数だから，合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$