解析基礎 小テスト

2023. 7. 21

学生番号	氏名

5.1. 次の積分を計算せよ。計算の過程を詳しく書くこと。

(1) $\displaystyle\int \left(2x+3-\frac{2}{x}\right) dx$

$$= \int 2x\,dx + 3\int dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x^2 + 3x - 2\log|x|$$

(2) $\displaystyle\int \cos(2x+3)\,dx$

$2x+3 = t$ とおく。この両辺を x で微分すると $2 = \dfrac{dt}{dx}$, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると $dx = \dfrac{dt}{2}$. このおきかえにより

$$\int \cos(2x+3)\,dx = \int \cos t \left(\frac{dt}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x+3)$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}\,dx$

(1) と同じ変換で

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \int \frac{1}{t}\left(\frac{dt}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t|$$

$$= \frac{1}{2}\log|2x+3|$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

(1) と同じ変換で

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{dt}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{t} = \sqrt{2x+3}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

$x^2+4 = t$ とおく。 この両辺を x で微分すると $2x = \dfrac{dt}{dx}$, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$. このおきかえにより

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{t}\left(\frac{dt}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t|$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+4)$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(5) と同じ変換で

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{dt}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{t} = \sqrt{x^2+4}$$