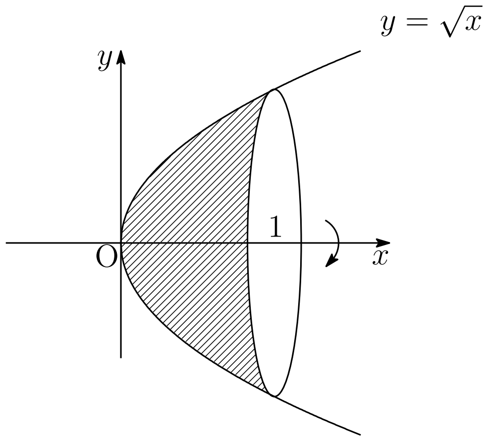
解析基礎 第14回問題　解答

1 $y=\sqrt{x}$ のグラフ, $x=0$, $x=1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで1回転してできる図形の体積を求めよ.

この立体を 点 $(x,0,0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $\sqrt{x}$ の円であり, 面積は πx であるから体積は

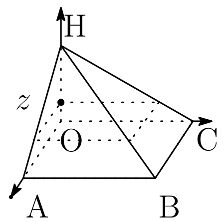
$$V=\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2dx=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$



2. 図のような空間図形の体積を求めよ。ただし

A$(a,0,0)$, B$(a,b,0)$, C$(0,b,0)$, H$(0,0,h)$

とする。



これはOABCを底面とする高さ h の錐体である。底面積 S は $S=ab$, 高さ z で xy 平面に平行に切った切り口の面積を $S(z)$ とすると底面と切り口は相似で

相似比 $=h:(h-z)$,　面積比 $=h^2:(h-z)^2$

だから

$S(z) = \dfrac{(h-z)^2}{h^2} S$

体積はこれを z について積分して

$\displaystyle\int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2} S\,dz = S\int_0^h \left(1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right)\,dz = S\left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2}\right]_0^h =$
$\dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}abh$

3. $I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{CR}} \cdots (a)$ は

$$CR\frac{dI}{dt} + I(t) = 0 \cdots (b)$$

の解であることを確かめよ。

(a) を微分すると

$I'(t) = I(0)\left(e^{-\frac{t}{CR}}\right)' = I(0)\left(-\frac{1}{CR}\right)e^{-\frac{t}{CR}} \cdots (c)$

(a), (c) を (b) に代入すると

左辺 $= CRI(0)\left(-\dfrac{1}{CR}\right)e^{-\frac{t}{CR}} + I(0)e^{-\frac{t}{CR}} = 0 =$ 右辺

だから (b) を満たしているので解である。

4. $y(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \cdots (a)$ は

$$my''(t) = -ky(t) \cdots (b)$$

の解であることを確かめよ。

(a) を微分すると

$y'(t) = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \varphi\right)$

$y''(t) = A\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)^2\left(-\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \varphi\right)\right) \cdots (c)$

これを (b) に代入すると

$$\text{左辺} = -mA\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right) = -ky(t) = \text{右辺}$$

だから解である。

5. t を独立変数とし, $y=y(t)$ を未知関数とする。次の微分方程式の解を解答群から選べ。

(1) $y'(t)=t$

(2) $y'(t)=y(t)$

(3) $y'(t)=2y(t)$

(4) $y'(t)=y(t)-1$

(5) $y'(t)=y(t)+t$

解答群

① $y=2e^t$,　② $y=e^t+1$,　③ $y=\dfrac{t^2}{2}+1$,　④ $y=\dfrac{t^2}{2}+t$,
⑤ $y=e^t+\dfrac{t^2}{2}$,　⑥ $y=e^t-t-1$　⑦ $y=2e^t+1$
⑧ $y=2e^{2t}$　⑨ $y=e^t-1$

① $y=2e^t$ は $y'=2e^t=y$ だから (2) の解

② $y=e^t+1$ は $y'=e^t=y-1$ だから (4) の解

③ $y=\dfrac{t^2}{2}+1$ は $y'=t$ だから (1) の解

④ $y=\dfrac{t^2}{2}+t$ は $y'=t+1$

⑤ $y=e^t+\dfrac{t^2}{2}$ は $y'=e^t+t=y-\frac{t^2}{2}+t$

⑥ $y=e^t-t-1$ は $y'=e^t-1=y+t$ だから (5) の解

⑦ $y=2e^t+1$ は $y'=2e^t=y-1$ だから (4) の解

⑧ $y=2e^{2t}$ は $y'=4e^{2t}=2y$ だから (3) の解

⑨ $y=e^t-1$ は $y'=e^t=y+1$

だから

(1) $y'(t) = t$ の解は ③

(2) $y'(t) = y(t)$ の解は ①

(3) $y'(t) = 2y(t)$ の解は ⑧

(4) $y'(t) = y(t) - 1$ の解は ② ⑦

(5) $y'(t) = y(t) + t$ の解は ⑥