解析基礎 第13回問題　解答

1. 次の定積分・広義積分を計算せよ。k は正の数。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\,dx$

$-kx = t$ とおく。両辺 x で微分すると $-k = \dfrac{dt}{dx}$, この両辺に $\dfrac{dx}{-k}$ をかけて $dx = -\dfrac{dt}{k}$。 この 2 式で $-kx$ と dx の置き換えを行うと

$$\int e^{-kx}\,dx = \int e^{t}\left(-\frac{dt}{k}\right) = -\frac{1}{k}\int e^t\,dt = -\frac{1}{k}e^t = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

が得られる。（これが不定積分の置換積分法である。）このようにして得られた原始関数 $-\frac{1}{k}e^{-kx}$ を使って広義積分を計算すると

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^\infty = \left(-\frac{1}{k}e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{k}e^{0}\right) = \frac{1}{k}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx$

(1) より

$$\int e^{-kx}\,dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}$$

だから

$$\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right)' = e^{-kx}$$

である。これと不定積分の部分積分法

$$\int (f(x))'g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)(g(x))'\,dx$$

を利用して

$$
\begin{aligned}
\int xe^{-kx}\,dx &= \int \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' \times x\,dx \\
&= \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \times x - \int \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \times (x)'\,dx \\
&= \frac{-xe^{-kx}}{k} + \int \frac{e^{-kx}}{k}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで再び (1) より

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-xe^{-kx}}{k} + \frac{1}{k}\left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right) \\
&= \frac{-(kx+1)e^{-kx}}{k^2}.
\end{aligned}
$$

これで原始関数 $\dfrac{-(kx+1)e^{-kx}}{k^2}$ がえられたが, これを利用して広義積分を計算すると

$$
\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx
$$

$$
= \left[\frac{-(kx+1)}{k^2}e^{-kx}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{-(kx+1)e^{-kx}}{k^2} - \frac{-e^0}{k^2} = \frac{1}{k^2}
$$

が得られる。

(別解) 広義積分の場合でも (もし積分が収束するならば), いま述べたように 2 段階ではなく, 以下に示すようにいきなり部分積分法を使うことができる。

$$
\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' \times x\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times 1\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right) \times x\right]_0^\infty - \left[\left(-\frac{1}{k}\right)^2 e^{-kx}\right]_0^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx} \times x\right) - \left(-\frac{1}{k}e^0 \times 0\right) - \left(-\frac{1}{k^2}e^{-\infty}\right) + \left(\frac{1}{k^2}e^0\right)
\end{aligned}
$$

$= \dfrac{1}{k^2}$

ここで $e^{-\infty} = 0,\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^{kx}} = 0,\ k > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ を使った。教科書 112 ページを見よ。

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

積分される関数が $x = -\dfrac{1}{2}$ で定義できないから広義積分であることに注意せよ。

$2x+1 = t$ とおく。両辺 x で微分すると $2 = \dfrac{dt}{dx}$, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ をかけて $dx = \dfrac{dt}{2}$。 この 2 式で $2x+1$ と dx の置き換えを行うと

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{t} = \sqrt{2x+1}$$

だから 原始関数 $\sqrt{2x+1}$ が得られるのでこれを使って

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \left[\sqrt{2x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4} = \sqrt{2\times 4+1} - \sqrt{0}$$
$$= 3$$

である。しかし

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \left[\sqrt{t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$ は誤り。

$x = -\frac{1}{2}$ のとき $t = 0$, $x = 4$ のとき $t = 9$

だから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \left[\sqrt{t}\right]_{0}^{9} = \sqrt{9} - \sqrt{0} = 2$$

が正しい。

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2+1}\, dx$

$(x = \tan t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とおけ) は取り消し

$x^2+1=t$ とおくと,

$dx = \dfrac{dt}{2x}$,

より

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\sqrt{t}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

だから

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

である。

(別解)

$x=0 \Rightarrow t=1,\ \ x=1 \Rightarrow t=2$

だから 2 段階をまとめて

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 x\sqrt{t}\frac{dt}{2x} = \left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

でもよい。

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

$(x=\tan t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とおけ) を追加

$x=\tan t$ とおくと

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ だから $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$,

$\dfrac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$, (三平方の定理)

$x=0 \Rightarrow t=0,\ x\to\infty \Rightarrow t\to\dfrac{\pi}{2}$

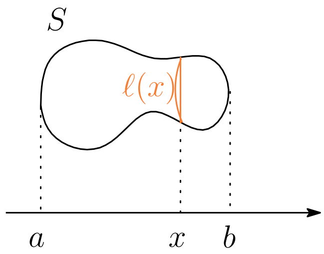
に注意すると

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(別解) $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1}x\right]_0^\infty = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2.



図のような図形を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. このとき図形の面積 S を $\ell(x)$ で表せ. 簡単でよいからそうなる説明をつけること.

右図のように S を分割し k 番目の断片に着目すると, その面積は大体 $\ell(x_k) \times \Delta x_k$ で近似される. (ここで x_k は k 番目の分点, Δx_k は k 番目の小区間の幅である.) したがって S は

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k$$

のように近似されるが

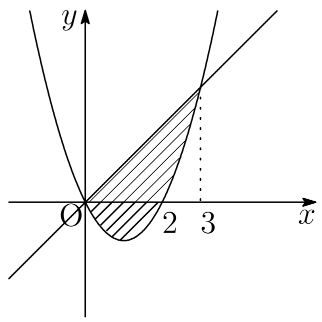
$$\lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\,dx \quad (\lim \text{ は分割を細かくする極限})$$

であり, 近似の誤差は極限を取ると 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

である.

3. (1) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = x$ のグラフの概形を書け. また, 二つのグラフの交点の座標を求めよ.



$y=x^2-2x=x(x-2)$ であるから $x=0$ または $x=2$ のとき $y=0$ となるので x 軸との交点は $(0,0)$ $(2,0)$ である．また $y=(x-1)^2-1$ だから頂点が $(1,-1)$ の放物線である．下に凸であるのは明らか.

$y=x$ は原点をとおり傾き 1 の直線である.

交点の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=x \end{cases}$$

をといて $(0,0)$ と $(3,3)$.

(2) 関数 $y=x^2-2x$, $y=x$ のグラフで囲まれる部分の面積を計算せよ.

この部分は $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあり, この範囲では直線 $y=x$ が放物線 $y=x^2-2x$ の上方にある。

$$\int_0^3 \left\{x-(x^2-2x)\right\} dx = \int_0^3 \left\{-x^2+3x\right\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

4. (1) 曲線 $C: y=x^3-2x+1$ の増減を調べよ。

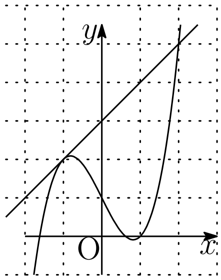
$f(x)=x^3-2x+1$ とおく。

$f'(x)=3x^2-2=3\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$x<-\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $f'(x)>0$ だから単調増加

$-\frac{\sqrt{6}}{3}<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $f'(x)<0$ だから単調減少

$\frac{\sqrt{6}}{3}<x$ のとき $f'(x)>0$ だから単調増加



$\frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$ に注意。

(2) C の $x = -1$ である点における接線 ℓ の方程式を求めよ。

$f'(-1) = 1$ だから ℓ の傾きは 1. $f(-1) = 2$ だから接点は $(-1, 2)$. したがって ℓ は点 $(-1, 2)$ をとおり傾き 1 の直線だから

$y = 1(x - (-1)) + 2 = x + 3$

(3) C と ℓ の交点を求めよ。

交点の座標 (x, y) は $\begin{cases} y = x^3 - 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$ の解である。

接点は $(-1, 2)$ であるから $x = -1$, $y = 2$ がひとつの解である。

y を消去して

$x + 3 = x^3 - 2x + 1 \iff x^3 - 3x - 2 = 0$

$x = -1$ がひとつの解であるから $x^3 - 3x - 2$ は $x + 1$ で割り切れる。わり算を実行すると

$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2)$

だから他の解は $x = 2$. このとき $y = 5$ だからもう一つの交点は $(2, 5)$. あわせて

$(x, y) = (-1, 2), (2, 5)$

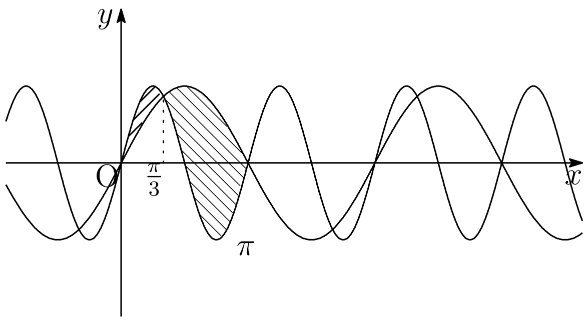
(4) C と ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ。

ℓ のほうが上にあるから

$$\int_{-1}^{2}((x+3)-(x^3-2x+1))\,dx = \int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

5. 区間 $[0,\pi]$ において, 2 つの曲線 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.

$y=\sin 2x$ は周期 π, $y=\sin x$ は周期 2π だから図示すると



となる.

$y=\sin x$ と $y=\sin 2x$ の交点は

連立方程式

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin 2x \end{cases}$$

を解けば求まる.

$\sin 2x - \sin x = 0$ であるが $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ だから

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ または $\cos x = \dfrac{1}{2}$

これを満たす x の値は $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲では $x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi.$

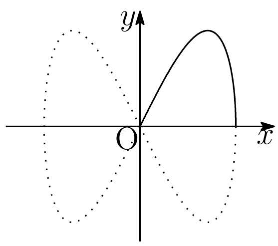
また, $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲では $\sin 2x \geqq \sin x$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ の範囲では $\sin 2x \leqq \sin x$, したがって囲まれる部分の面積は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx \\
&= \Big[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\frac{1}{2}\cos 2x - \cos x \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

6. $(\star)\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin(2\theta) \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のようにパラメータ表示された曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

曲線は図の様になる。Mathetatica で書いて見よ。コマンドは

```
ParametricPlot[{Cos[t], Sin[2 t]}, {t, 0, Pi/2}]
```



$$\ell(x) = y = \sin(2\theta), \quad dx = -\sin\theta\, d\theta$$

だから置換積分により

$$\text{面積} = \int_0^1 \ell(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin(2\theta)\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(3\theta) - \cos\theta)\, d\theta = \frac{2}{3}$$

$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}(\cos(A+B) - \cos(A-B))$ を使った。