

## 解析基礎 第11回問題 解答

1.

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x}$$

$\tan \frac{x}{2} = t$  とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

となるので

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 5 \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2 + 10t + 3}$$

ここで部分分数分解により

$$\frac{2}{3t^2 + 10t + 3} = \frac{2}{3(t+3)(t+\frac{1}{3})} = -\frac{1}{4} \frac{1}{t+3} + \frac{1}{4} \frac{1}{t+\frac{1}{3}}$$

がわかるから

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+3} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \log \left| \frac{t+\frac{1}{3}}{t+3} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{\tan \frac{x}{2} + 3} \right| \end{aligned}$$

6.2. (1)  $\tan x = t$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \boxed{1+t^2}$  だから  
 $dx = \boxed{\frac{1}{1+t^2}} dt$ .

(2)  $\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}$  を部分分数分解しよう。ある定数  $A, B, C$  があって

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} \equiv \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \quad (t \text{ の恒等式})$$

となることが知られているが,

$$\text{右辺} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1+t^2)^2} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

だから分子同士を比較して

$$1 \equiv (A+B)t^2 + (B+C)t + A+C$$

となっているはずである. 左辺を  $0t^2 + 0t + 1$  と考えると

$$\text{両辺の } t^2 \text{ の係数が等しいから } A + B = 0$$

$$\text{両辺の } t \text{ の係数が等しいから } B + C = 0$$

$$\text{両辺の 定数項が等しいから } A + C = 1$$

これを解いて

$$A = C = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \text{ がわかる. だから}$$

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{(-t+1)}{1+t^2} \quad (t \text{ の恒等式})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \frac{\cos x dx}{\cos x + \sin x} &= \int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

ここで  $1+t^2 = s$  とおくと  $t dt = \frac{ds}{2}$  だから第 10 回の「有理関数の積分」を使うと

$$\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \log |s| = \frac{1}{2} \log(1+t^2),$$

同様に

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \tan^{-1} t,$$

したがって

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log |1+t| + \frac{1}{2} \tan^{-1} t - \frac{1}{4} \log(1+t^2) = \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{(1+t)^2}{1+t^2}} + \frac{1}{2} \tan^{-1} t \\ &= \frac{1}{2} \log |\sin x + \cos x| + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$