解析基礎 第10回問題　解答

1. 置換積分法により次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$x^2+1=t$ とおくと、両辺微分して

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

これらで置き換えをして

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

(2) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$

$t=1-x$ とおき両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

となるが, この両辺に $-dx$ を掛けると

$$dx = -dt \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $-dt$ に置き換えればよいことになる. $x=1-t$ に注意して

$$\int x(1-x)^4\,dx = \int xt^4\,(-dt) = \int (1-t)t^4\,(-dt)$$
$$= \int (t-1)t^4\,dt = \int t^5\,dt - \int t^4\,dt$$
$$= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{6}(1-x)^6 - \frac{1}{5}(1-x)^5$$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$

$\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$ だから
$\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x$

(4) $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$ ($\cos x = t$ とおけ)

$\cos x = t$ とおく。両辺微分して $-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$
$\sin x\, dx = -dt$
これらで置き換えをして
$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| = -\log|\cos x|$

2. 部分積分法により次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx$
$f'(x) = e^{2x}$, $g(x) = x$ とみて部分積分法

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

を使う.
まず $f'(x) = e^{2x}$ であることから

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

となる. 次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\, dx &= (\frac{1}{2}e^{2x})\, x - \int (\frac{1}{2}e^{2x})\, (x)'\, dx \\ &= \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}.\end{aligned}$$

短く言うと

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\, dx &= \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\, dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int (x)'\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\, dx \\ &= \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\end{aligned}$$

としてもよい.

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx$

$\displaystyle\quad = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx \cdots (\star)$

ここで

$\displaystyle\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - e^x$

だから

$(\star) = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

(3) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

だから

$$(-\cos x)' = \sin x$$

であることがわかる. 次に部分積分法を使って

$\displaystyle\int x\ \sin x\,dx = \int x\,(-\cos x)'\ dx$

$\displaystyle\quad = x\,(-\cos x) - \int (x)'\,(-\cos x)\,dx$

$\quad = -x\cos x + \sin x.$

(4) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$, (部分積分を 2 回使う)

$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx = \int e^x(-\cos x)'\,dx$

$\displaystyle\quad = e^x(-\cos x) - \int (e^x)'(-\cos x)\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \cdots (\star)$

一方

$$\int e^x \cos x\, dx = \int e^x (\sin x)'\, dx$$
$$= e^x(\sin x) - \int (e^x)'(\sin x)\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

これを $(\star)$ に代入して

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

整理して

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right)$$

3. (1) 次の式を部分分数に分解せよ.

$$\frac{x+8}{x^2+x-6}$$

分母を因数分解すると

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

だからこの関数は

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \quad (A\ B\ \text{は定数})$$

の形に変形される．これを部分分数分解という．この等式が x の恒等式になるように定数 A, B の値を決めよう．右辺を通分して足し算すると

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$= \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

だから分子どうし比較して

$$x+8 = (A+B)x+3A-2B$$

であればよい.

x の係数どうしを比較して $A+B=1$

定数項どうし比較して $3A-2B=8$

この連立方程式を解くと $A=2$, $B=-1$ だから

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ.

(1) により

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx &= \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= 2\log|x-2| - \log|x+3|\end{aligned}$$