

解析基礎 第9回問題 解答

1. (1) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるというのは

$$\underline{\frac{d}{dx}F(x) = f(x)}$$

となる事である。ただし $\frac{d}{dx}F(x)$ は $F'(x)$ と同じで $F(x)$ の導関数
を表す記号である。

(式のみ書くのは不可。)

- (2) $f(x)$ の不定積分とは

$$\underline{F(x) + C}$$

のこである。ただし、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり、 C は任意
の定数である。この定数 C を積分定数という。

(式のみ書くのは不可。)

$f(x)$ の不定積分を記号

$$\int f(x)dx$$

で表す。したがって

$$\int f(x) dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である。しばらく積分定数は省略してもよいことにする。

2. (1) C を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

だから

$$\int 0 dx = C$$

(2) $\frac{d}{dx}2x = 2$

だから

$$\int 2 dx = 2x + C$$

$$(3) \frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

だから両辺を2で割って

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = x$$

だから

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

(4) a を0でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

だから 両辺を a で割って

$$\frac{1}{a} \frac{d}{dx} (x^a) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} x^a \right) = x^{a-1}$$

ここで $a-1 = \alpha$ とおくと $a = \alpha + 1$ となるから.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \right) = x^\alpha$$

だから $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$$

$$(5) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

だから

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

である. または

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

だから

$$\frac{d}{dx} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin x$$

したがって

$$\int \sin x \, dx = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

でもよい。というかこっちがよい。

$$(6) \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

だから

$$\frac{d}{dx} (-\cos x) = \sin x$$

だから

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

である。または

$$\frac{d}{dx} \cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

だから $\left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ を x でおきかえて、また x を $x - \frac{\pi}{2}$ でおきかえて)

$$\frac{d}{dx} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$$

したがって

$$\int \cos x \, dx = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

でもよい。というかこっちがよい。

(7) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である。 $\alpha = \frac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(8) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ である。 $\alpha = -\frac{1}{2}$ として (4) を用いると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx &= \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

(9) $\frac{1}{x} = x^{-1}$ であるが (4) は使えない.

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$$

だから不定積分の定義により

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C.$$

(10) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

3. 積分定数 C は省略する.

$$(1) \int (x^2 + 3x) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx &= \int (x + 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \int x dx + 2 \int \sqrt{x} dx + \int 1 dx = \frac{1}{2}x^2 + 2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C \end{aligned}$$

$$(3) \int (9x^2 + 2e^x) dx = 9 \int x^2 dx + 2 \int e^x dx = 3x^3 + 2e^x.$$

4. (1) $\int (2x - 3)^5 dx$

$$2x - 3 = t \quad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\frac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. この(**)から dx を $\frac{1}{2} dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int (2x - 3)^5 dx = \int t^5 \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{12} t^6$$

$t = 2x - 3$ だから

$$= \frac{1}{12} (2x - 3)^6.$$

(2) $2x - 3 = t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{12} (2x - 3)^6 \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{12} t^6 \right) = 2 \frac{1}{12} 6t^5 = t^5 = (2x - 3)^5$$

これは (1) の検算である。

$$(3) \int \cos(2x - 3) dx$$

(1) と同じ変換で

$$2x - 3 = t \quad (*)$$

とおき, x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\frac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. これらにより $2x - 3$, dx をおきかえると,

$$\int \cos(2x - 3) dx = \int \cos t \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \sin t$$

$t = 2x - 3$ だから

$$= \frac{1}{2} \sin(2x - 3)$$

(4) $2x - 3 = t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \sin(2x - 3) \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sin t \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos t = \cos t = \cos(2x - 3)$$

これは (3) の検算である。

$$(5) \int e^{2x-3} dx$$

(1) と同じ変換で $2x - 3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3} dx = \int e^t \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} e^t$$

$t = 2x - 3$ だから

$$= \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

(6) $2x - 3 = t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{2x-3} \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} e^t \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} e^t = e^t = e^{2x-3}$$

これは (5) の検算である。

5. (1) $\int \sqrt{2x-3} dx$ を計算しよう. $2x - 3 = t$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2$ だから $dx = \frac{1}{2} dt$. したがって置換積分法を使って

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x-3} dx &= \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$2x - 3 = t$ とおいて合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \times 2 \\ &= t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3} \end{aligned}$$

これは (1) の検算である。

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$ を計算しよう. $2x-3=t$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2$ だから $dx = \frac{1}{2}dt$. したがって置換積分法を使って

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3} \end{aligned}$$

(4) $\frac{d}{dx} (\sqrt{2x-3})$

$2x-3=t$ において合成関数の微分法を使う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((2x-3)^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{1}{2}} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2 \\ &= t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{aligned}$$

これは (3) の検算である。

6. (1) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算せよ. ($x^2+1=t$ とおく)

$t = x^2 + 1$ とおき, この両辺を x で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\frac{dx}{2x}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる. このことから dx を $\frac{1}{2x} dt$ に置き換えればよいことになる. (これは定理 6.3 (6.8) の置き換えと全く同じ置き換えである.)

この置き換えにより

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+1} dx &= \int x\sqrt{t} \left(\frac{1}{2x} dt \right) = \int \sqrt{t} \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を計算せよ. ($x^2+1=t$ とおく)

(1) と同じ置き換えにより

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{2x} dt \right) = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} 2t^{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

7. (1) $\int \frac{dx}{2x+1}$

$$2x+1=t \quad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\frac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \quad (**)$$

という等式が得られる. この(**)から dx を $\frac{1}{2} dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{1}{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t|$$

$t = 2x+1$ だから

$$= \frac{1}{2} \log |2x+1|.$$

(2) $\int x\sqrt{1-x} dx$

$t = 1-x$ とおき両辺を x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

となるが, この両辺に $-dx$ を掛けると

$$dx = -dt \quad (**)$$

という等式が得られる. この(**)から dx を $-dt$ に置き換えればよいことになる. $x = 1 - t$ に注意して

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x} dx &= \int x\sqrt{t}(-dt) = \int (1-t)\sqrt{t}(-dt) \\ &= \int (t-1)\sqrt{t} dt = \int t\sqrt{t} dt - \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt - \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$1 + \sin x = t$$

とおき置換積分法を使う. 両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺に dx をかけて

$$\cos x dx = dt$$

だから $1 + \sin x$ を t に, $\cos x dx$ を dt に置き換えなければならないので

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{1+\sin x}.$$