解析基礎 第8回 解答

1. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y=\sqrt{3x-2}$

$t=3x-2$ とおく. 関数 $y=\sqrt{3x-2}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=3x-2$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(3x-2)=3$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 3=\frac{2}{3\sqrt{3x-2}}$$

となる.

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

$t=3x-2$ とおく. 関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$ は関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t=3x-2$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(3x-2)=3$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\times 3=-\frac{3}{2(3x-2)^{\frac{3}{2}}}$$ となる.

(3) $y=x\sqrt{3x-2}$

積の微分法を使う.

$y' = (x)'\sqrt{3x-2} + x\left(\sqrt{3x-2}\right)'$

(1) の結果を使って

$$= \sqrt{3x-2} + x \times \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{2(3x-2)}{2\sqrt{3x-2}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{9x-4}{2\sqrt{3x-2}}$$

(4) $y = \sqrt{x^2+4}$

$t = x^2+4$ とおく. 関数 $y = \sqrt{x^2+4}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+4$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2+4\right) = 2x$$

であり

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

となる.

(5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

商の微分法 と (4) により

$$y' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+4} - x(\sqrt{x^2+4})'}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{\sqrt{x^2+4} - x(\sqrt{x^2+4})'}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{\sqrt{x^2+4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} =$$
$$\frac{(\sqrt{x^2+4})^2 - x^2}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

2 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とする.

(1) $f(0),\ f'(0),\ f''(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ を求めよ。

$1-x=t$ とおくと

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}=t^{-1},$

だから 合成関数の微分法を使うと

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}(t^{-1})=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}(t^{-1})=(-1)\cdot(-1)\,t^{-2}=t^{-2},$

$f''(x)=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}(t^{-2})=(-1)\cdot(-2)t^{-3}=2\,t^{-3},$

$f'''(x)=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\,(2t^{-3})=(-1)\cdot(2\cdot(-3)t^{-4})=2\cdot 3\cdot t^{-4}.$

これを繰り返して

$f^{(n)}(x)=n!\,t^{-(n+1)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$

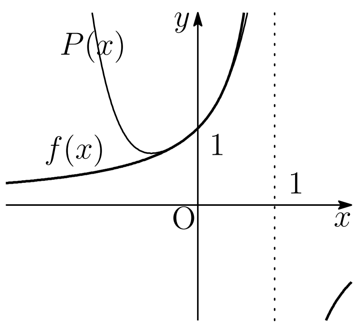
(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ とするとき n 次のマクローリン近似多項式 $P(x)$ を計算せよ.

$f^{(n)}(0)=n!.$

だから

$$\begin{aligned}P(x)&=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}\,x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\\&=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n.\end{aligned}$$

$n=4$ のときを図示すると



3 次の関数の増減・凹凸・極値を調べ, グラフの概形を書け。

(1) $f(x)=xe^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$, ($x=1$ を境に正から負に変わる。)

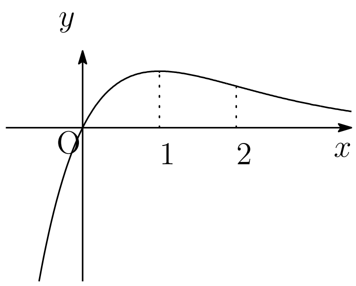
$f''(x) = e^{-x}(-2+x)$ ($x=2$ を境に負から正に変わる。)

$x \to +\infty$ のとき $xe^{-x} \to +0$, (前回やった)

だから 増減凹凸を調べると,

x		0		1		2		∞
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0
				極大		変曲点		

だから $x=1$ で極大値 e^{-1} をとり, 変曲点は $(2, 2e^{-2})$.



(2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

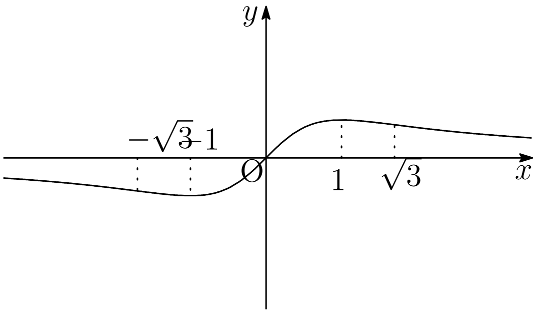
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3-3x)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

だから増減表を書くと

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
			変曲点		極小		変曲点		極大		変曲点		

だから $x=-1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとり $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる.



4 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ の極値を求めよ。ただし定義域は $[0,\infty)$ とする。

$$f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

だから $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。