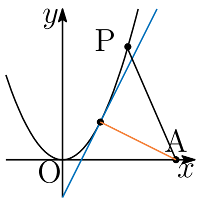
解析基礎 第7回 解答

問題.1 $y = x^2$ の上の点を P とする。

(1) P と点 A(3, 0) の距離が最小になるような P を求めよ。



$\mathrm{P}(x, x^2)$, A(3, 0) とするとき

$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + (x^2-0)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$ $(= f(x)$ とおく$)$

を最小にする x を求めればよい。

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2+4x+6) = (x-1)((2x+1)^2+5)$$

だから $x = 1$ を境に導関数 $f'(x)$ の値の符号は負から正に変わる。したがって $f(x)$ は $x = 1$ を境に減少から増加に変わる。したがって $x = 1$ で極小値 $f(1) = 5$ をとる。だから距離が最小になる P は $(1, 1)$.

(2) (1) で求めた P における接線と AP が直交することを確かめよ。

$(1, 1)$ での接線 の傾きは $f'(1) = 2$.

AP の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

だから直交する。

実は下に凸な関数とグラフの下にある点 A でこの問題と同じことをすると、AP と接線は直交することがわかる。

2 半径 R の球に内接する直円柱の体積の最大値を求めよ.

直円柱の高さを x, 底面の半径を r とすると $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2}$ であるから直円柱の体積 $V(x)$ は

$V(x) = \pi r^2 x = \dfrac{\pi}{4}(4R^2 - x^2)x$

となる.

$V'(x) = \dfrac{\pi}{4}(4R^2 - 3x^2)$

だから $[0, 2R]$ の範囲では $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ をとることが分かる.

3 平面の動点 P は点 $A(0,1)$ を出発して点 $B(1,-1)$ に向かうが, 領域 $y>0$ では速さが u, 領域 $y<0$ では速さが v であるものとする. 最短時間で B に達するような P の軌跡を求めたい.

(1) このような軌跡は x 軸上のある一点 $C(x,0)$ で折れ曲がる折れ線であることは明らかであろう. この折れ線 ACB を通過するのに要する時間を x で表せ. (これを $f(x)$ とおく.)

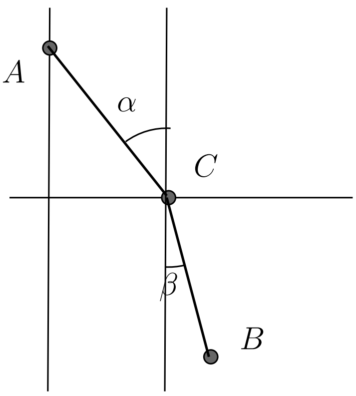
AC でかかる時間 $= \dfrac{\mathrm{AC}}{u} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{u}$,

CB でかかる時間 $= \dfrac{\mathrm{CB}}{v} = \dfrac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{v}$

よって

ACB でかかる時間 $= \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{u} + \dfrac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{v}$ (これを $= f(x)$ とおく.)

(2) $f(x)$ が最小になるような C で図のように角 α, β をとると $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{u}{v}$ が満たされることを確かめよ.



$0<x<1$ で $f(x)$ が最小になる x を求めたい. $f(x)$ が最小になる x では $f'(x)=0$ でなくてはならない.

$$f'(x) = \frac{x}{u\sqrt{1+x^2}} + \frac{x-1}{v\sqrt{1+(1-x)^2}}$$

$$= \frac{u(x-1)\sqrt{1+x^2} + vx\sqrt{1+(1-x)^2}}{uv\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}$$

でありこの分母は常に正である.

またこの分子を $g(x)$ とおくと $g(x)$ は $[0,1]$ で連続であり, $g(0) = -u < 0$, $g(1) = v > 0$ だから $g(x) = 0$ となるような x が $[0,1]$ の範囲に存在する.

さらに

$$g'(x) = \frac{v(2x^2-3x+2)\sqrt{1+x^2} + u(2x^2-x+1)\sqrt{1+(1-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}} \geqq 0$$

だから $g(x)$ は単調増加である. したがって $g(x) = 0$ を満たす x はただひとつであり, $g(x)$ はその前後で符号が負から正に変わる.

したがって $f'(x)$ は $[0,1]$ でただ 1 回だけ 0 となり, その前後で符号が負から正に変わる. だから $f(x)$ はただ 1 回だけ極小値をとりそれが最小値となる.

$f'(x) = 0$ となる x では

$$\frac{x}{u\sqrt{1+x^2}} + \frac{x-1}{v\sqrt{1+(1-x)^2}} = 0$$

だから

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}} = \frac{u}{v}$$

となるがこの左辺は $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ に等しい.