解析基礎 第5回　解答

問題 1. 次の導関数・高階導関数を計算せよ。

(1) $(x^3)' = 3x^2,\ (x^3)'' = (3x^2)' = 6x,\ (x^3)''' = (6x)' = 6,$

$(x^3)^{(4)} = (6)' = 0,\ n = 4, 5, 6, \cdots$ のとき $(x^3)^{(n)} = 0,$

(2) $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$t = x^2+1$, $y = \sqrt{x^2+1}$ とおくと $y = \sqrt{x^2+1}$ は $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+1$ の合成関数であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sqrt{t}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{t}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。つぎに

$$(\sqrt{x^2+1})'' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 積の微分法により, $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$

(4) (3) の結果を, 積の微分法によりさらに微分すると

$(xe^x)'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

(5) (3), (4) の計算を繰り返せば

$(xe^x)^{(n)} = ne^x + xe^x \cdots (\star),\ n = 1, 2, \cdots$

となることが予想されるが, これを数学的帰納法で示そう。

(3) より $n = 1$ のときは正しい。

$(xe^x)^{(n-1)} = (n-1)e^x + xe^x$

が正しいと仮定すると（帰納法の仮定), 両辺微分して

$(xe^x)^{(n)} = (n-1)e^x + (x)'e^x + x(e^x)' = (n-1)e^x + e^x + xe^x = ne^x + xe^x$

となるから n の時も正しい。したがってすべての n に対して正しい.

教科書 99 ページの Leibnitz の公式を使ってもよい。

問題 2. (発展問題) (1) 関数 $f(x)$ は何回でも微分できるとするとき,

$$(xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

であることを確かめよ。(数学的帰納法を使う。)

前問 (5) と同様である。

(2) $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ をくり返し使って (教科書 86 ページを見よ。)

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

が分かるから, (1) で $f(x) = \sin x$ として

$(x\sin(x))^{(n)} = x\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

がえられる。

問題 3.

(2) $y = \cos^3(3x-2)$ のとき,

$3x - 2 = t$, $\cos(3x-2) = s$ とおくと $y = s^3$, $s = \cos t$ だから $y = \cos^3(3x-2)$ は

$y = s^3,\ s = \cos t,\quad t = 3x - 2,$

の合成関数である.

$\dfrac{dy}{ds} = 3s^2,\quad \dfrac{ds}{dt} = -\sin t,\quad \dfrac{dt}{dx} = 3$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{ds}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{dx} = 3s^2 \times (-\sin t) \times 3 = -9\sin(3x-2)\cos^2(3x-2).$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & 3x-2 & & \cos t & & s^3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dt}{dx} & \times & \dfrac{ds}{dt} & \times & \dfrac{dy}{ds} \end{array}$$

(3) $y = \cos\left((3x-2)^3\right)$ のとき,

$3x-2=t$, $(3x-2)^3=s$ とおくと $y=\cos s$, $s=t^3$ だから $y=\cos\left((3x-2)^3\right)$ は

$$y=\cos s,\ s=t^3,\quad t=3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds}=-\sin s,\quad \frac{ds}{dt}=3t^2,\quad \frac{dt}{dx}=3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}=-\sin s\times 3t^2\times 3=-9\sin\left((3x-2)^3\right)\,(3x-2)^2.$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x & \longmapsto & t & \longmapsto & s & \longmapsto & y \\
 & & \vdots & \shortparallel & \vdots & \shortparallel & \vdots & \shortparallel \\
 & & \downarrow & 3x-2 & \downarrow & t^3 & \downarrow & \cos s \\
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dt}{dx} & \times & \dfrac{ds}{dt} & \times & \dfrac{dy}{ds} &
\end{array}$$

(4) $y=e^{\sin x}$, $t=\sin x$ とおく.

関数 $y=e^{\sin x}$ は関数 $t=\sin x$, $y=e^t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\cos x\times e^t=e^{\sin x}\cos x$$

となる.

(5) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{(1+\cos x)'(1-\sin x)-(1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}\\
&=\frac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}\\
&=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}
\end{aligned}$$

(6) $t=\dfrac{x}{a}$ とおく.

関数 $y=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ は関数 $y=\frac{1}{a}\tan^{-1}t$, $t=\frac{x}{a}$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{a}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2+x^2}$$

となる.

(7) $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$, $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおく.

関数 $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ は関数 $y=\log|t|$, $t=x+\sqrt{x^2+1}$

の合成関数である.

まず $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$z=\sqrt{x^2+1}$ とおくと $t=x+z$ であるが,
ここで $s=x^2+1$ とおくと $z=\sqrt{x^2+1}$ は $z=\sqrt{s}$, $s=x^2+1$ の合成関数
であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{ds}\frac{ds}{dx}=\frac{d}{ds}\sqrt{s}\frac{d}{dx}(x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{s}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。(これが大事な導関数である。)

再び y, t にもどると

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x+z)=1+\frac{dz}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\times\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

(8) $y = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ のとき $t = \dfrac{x-a}{x+a}$ とおくと $y = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ は $y = \dfrac{1}{2a}\log|t|,\ t = \dfrac{x-a}{x+a}$ の合成関数になる。

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{(x-a)'(x+a)-(x-a)(x+a)'}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2a}\log|t|\right) = \frac{1}{2at}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{2a}{(x+a)^2}\times\frac{1}{2at} = \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

となる．