解析基礎 第4回　解答

問題 1. 定義にしたがって次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^3$

$f(x) = x^3$ とおくと $f(x+h) = (x+h)^3$ だから

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$h \neq 0$ より, h で約分できるので

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

(2) $y = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$ とおくと $f(x+h) = \sqrt{x+h}$ だから

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$h \neq 0$ より, h で約分することができるので

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(3) $y = \dfrac{1}{x}$ のとき, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ここで $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ だから

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

問題 2　次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

$$y' = (x^3 - 2x^2 + 5x + 6)' = (x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' + (6)' = 3x^2 - 4x + 5$$

(2) $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 3(\sqrt{x})' - 2\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(3) $y = x^2 + x - 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

$$y' = \left(x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (x^2)' + (x)' - (1)' - \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

(4) $y = \dfrac{x}{x-1}$

$$y' = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

問題 3. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = (2x-1)^{10}$ のとき $t = 2x - 1$ とおく.

関数 $y = (2x-1)^{10}$ は関数 $y = t^{10}$, $t = 2x - 1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{10}) = 10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(2x-1) = 2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 10\,t^9 \times 2 = 20(2x-1)^9$$

である.

(2) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t = 2x - 1$ とおく. $y = \dfrac{1}{2x-1}$ は $y = \dfrac{1}{t}$, $t = 2x - 1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,(2x-1) = 2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \times 2 = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{2x-1}\right)' = \frac{(1)' \times (2x-1) - 1 \times (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{0 \times (2x-1) - 1 \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}.$$

(3) $y = \sqrt{2x-1}$ のとき, $t = 2x-1$ とおく．関数 $y = \sqrt{2x-1}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = 2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x-1) = 2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(4) $y = x^3 + 2x^2 + 1$ のとき,

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 1)' = (x^3)' + 2(x^2)' + (1)' = 3x^2 + 4x.$$

(5) $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^8$ のとき $t = x^3 + 2x^2 + 1$ とおく.

関数 $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^8$ は関数 $y = t^8$, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 1) = 3x^2 + 4x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^8) = 8\,t^7$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 8\,t^7 \times (3x^2 + 4x) = 8(3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2 + 1)^7$$

である.

(6) $y = \dfrac{1}{x}$ のとき

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

(7) $y = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + 1}$ のとき, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right)=-t^{-2}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-t^{-2})\times(3x^2+4x)=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^3+2x^2+1}\right)'&=\frac{(1)'\times(x^3+2x^2+1)-1\times(x^3+2x^2+1)'}{(x^3+2x^2+1)^2}\\&=\frac{0\times(x^3+2x^2+1)-1\times(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

(8) $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t^8}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-8}\right)=-8t^{-9}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-8t^{-9})\times(3x^2+4x)=\frac{-8(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^9}$$

である.

(9) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(10) $y=\sqrt{x^2+1}$ のとき, $t=x^2+1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)=2x$$

でありまた (9) により

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times(2x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる．

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(12) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ のとき，$t=x^2+1$ とおくと，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ は関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，$t=x^2+1$ の合成関数である．

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)=2x$$

であり，また (11) より

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}}$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}}\times(2x)=\frac{-(2x)}{2(x^3+2x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-x}{(x^3+2x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．

問題 3. 次の関数の導関数を計算せよ。a は正の定数とする。

(1) $y=e^x$

$(\log y)'=\dfrac{1}{y}$ から導く。$y=e^x$ は $x=\log y$ の逆関数であるから逆関数の微分法により

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}\log y}=\frac{1}{\dfrac{1}{y}}=y=e^x,$$

(2) $y=\log x$ の導関数は $t\to 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}}\to e$ であることを使う

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\log\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}$$

ここで $t=\frac{h}{x}$ とおくと $t\to 0$ だから

$$=\frac{1}{x}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}\to\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

だから $y'=\dfrac{1}{x}$

(3) $y=e^{ax}$ のとき $t=ax$ とおく.

関数 $y=e^{ax}$ は関数 $y=e^t,\ t=ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=a,\qquad$ また (1) より $\dfrac{dy}{dt}=e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=e^t\times a=a\,e^{ax}$

となる.

(4) $y=\log(ax)$ のとき $t=ax$ とおく.

関数 $y=\log(ax)$ は関数 $y=\log t,\ t=ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(ax)=a,\qquad$ また (2) より $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\log t=\dfrac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{t}\times a=\dfrac{1}{x}$

となる.

$(\log(ax))'=(\log x)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log(ax)=\log a+\log x$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(5) 積の微分法と (3) により

$(xe^{3x})'=(x)'e^{3x}+x(e^{3x})'=e^{3x}+x(3e^{3x})=(1+3x)\,e^{3x}.$

(6) $y=\log(x^2+1),\ t=x^2+1$ とおく.

関数 $y=\log(x^2+1)$ は関数 $t=x^2+1,\ y=\log t$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx}=2x$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = 2x \times \frac{1}{t} = \frac{2x}{x^2+1}$$

となる.

(7) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \cosh x$$

(8) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \sinh x$$

(9) $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ のとき, 商の微分法により

$$y' = \frac{(e^x)'(1+e^x) - (e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

(10) $y = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$ とおき対数微分法を使う.

$$\log y = \log(x+2) - \log(x+1) - \log(x-1)$$

だから

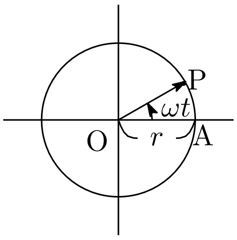
$$(\log y)' = (\log(x+2))' - (\log(x+1))' - (\log(x-1))'$$
$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)}.$$

一方 $(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)'y = -\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

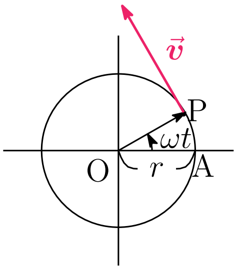
問題.4 点 P は原点中心半径 r の円周上を, 時刻 0 で点 $\mathrm{A}(r, 0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している.

(1) このとき, 時刻 t における P の座標を t を用いて表せ.



角速度が ω だから P は時刻 t には円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る．だから $(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ である．

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を求めよ。



速度ベクトルの成分表示は P の座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{v}(t) = ((r\cos\omega t)', (r\sin\omega t)') = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$$

問題.5　次の関数の導関数を計算せよ．

(1) $y = \sin(3x-2)$ のとき $3x-2 = t$ とおくと $y = \sin(3x-2)$ は $y = \sin t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる．

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である．合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x-2).$

(2) $y = \cos(3x-2)$ のとき，$3x-2 = t$ とおくと $y = \cos(3x-2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる．

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \cos t$ より $\dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

である．合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2).$$

(3) $y = \tan(3x-2)$ のとき, $3x-2 = t$ とおくと

$y = \tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

である. あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{3}{\cos^2(3x-2)}.$$

(4) 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}.$$

(5) $y = \log(\cos x)$, $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = \log(\cos x)$ は関数 $t = \cos x$, $y = \log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = -\sin x \times \frac{1}{t} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

となる.

(6) 積の微分法により

$$(e^{2x}\cos 3x)' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2\,e^{2x}\,\cos 3x - 3\,e^{2x}\,\sin 3x.$$

(7) $y = x\cos x$ のとき積の微分法により

$$y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$$