解析基礎　第3回　解答

問題 1. (1) 関数 $f(x)$ の, a における微分係数 $f'(a)$ を定義する式を書け.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a は定数であることに注意。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義する式を書け.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x は変数であることに注意。

(3) $f(x) = x^2$ とする. この関数の 1 における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ のとき $f(1) = 1^2$, $f(1+h) = (1+h)^2$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

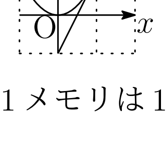
$$= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

(4) (3) の関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

接線は, 傾きは $f'(1) = 2$ で点 $(1, f(1)) = (1, 1)$ を通る直線だから

$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

(5) (3) の関数のグラフと, (4) で求めた接線を書け.



1 メモリは 1

(6) (3) の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ のとき $f(x) = x^2$, $f(x+h) = (x+h)^2$ に注意せよ。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

問題 2. $f(x) = x^2 - 2x$ とする.

(1) この関数の 2 における微分係数 $f'(2)$ を求めよ.

$f(x) = x^2 - 2x$ のとき $f(1) = 1^2 - 21$, $f(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h)$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\{(2+h)^2 - 2(2+h)\} - \{(2)^2 - 2\times 2\}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0}(h + 2) = 2$$

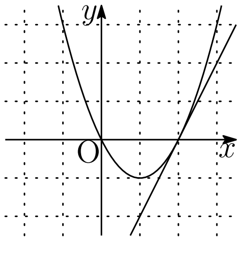
(2) この関数のグラフの, x 座標が 2 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 2 である点は $(2, f(2)) = (2, 0)$ である.

傾きは $f'(2) = 2$ だから

$y = 2(x-2) + 0 = 2x - 4$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 3. $f(x) = x^3$ とする.

(1) この関数の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-(1)^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}
\end{aligned}
$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$
= \lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3
$$

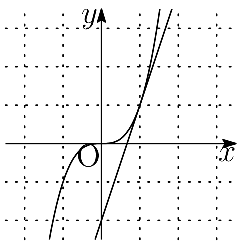
(2) この関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 1 である点は $(1, f(1)) = (1, 1)$ である.

傾きは $f'(1) = 3$ だから

$y - 1 = 3(x-1)$ 整理して $y = 3x - 2$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする.

(1) この関数の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f(1) = \dfrac{1}{1}$, $f(1+h) = \dfrac{1}{(1+h)}$ に注意せよ。

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1-(1+h)}{1+h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h}{1-h}
\end{aligned}
$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$
= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{1-h} = -1
$$

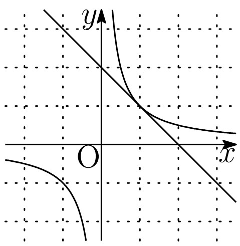
(2) この関数のグラフの, x 座標が 1 (訂正) である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 1 である点は $(1, f(1)) = (1, 1)$ である.

傾きは $f'(1) = -1$ だから

$y - 1 = -1(x - 1)$ 整理して $y = -x + 2$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 5. $f(x) = \sqrt{x+1}$ (訂正) とする.

(1) この関数の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

$f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき $f(0) = \sqrt{0+1}$, $f(0+h) = \sqrt{(0+h)+1}$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{0+h+1} - \sqrt{0+1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{\sqrt{h+1}+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(h+1)-1}{\sqrt{h+1}+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{h+1}+1}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2}$$

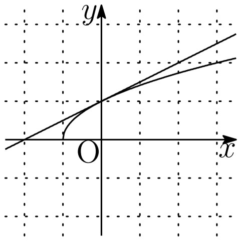
(2) この関数のグラフの, x 座標が 0 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 0 である点は $(0, f(0)) = (0, 1)$ である.

傾きは $f'(1) = \frac{1}{2}$ だから

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$ 整理して $y = \frac{x}{2} + 1$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.


y
O
x