解析基礎　第2回　解答

記号の使い方に気を付けて筋の通った書き方をしてください。

問題 1. (1) $x \to 1 \pm 0 \iff x - 1 \to \pm 0$ だから

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

または

$$\frac{x}{x-1} \to \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

(2) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1-\pm 0} = \frac{1}{1 \mp 0} = 1 \pm 0,$$

または

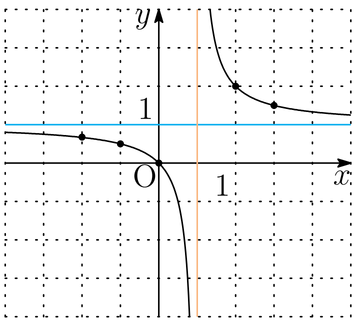
$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \to \frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1-\pm 0} = \frac{1}{1 \mp 0} = 1 \pm 0.$$

$\left(\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1} \to 1 + \dfrac{1}{\pm\infty} = 1 + (\pm 0) = 1 \pm 0\right.$ とした人がいましたが、わかりやすい解法です。$\left.\right)$

まとめると

x	$-\infty$	-2	-1	0	1 ± 0	2	3	$+\infty$
$x-1$	$-\infty$	-3	-2	-1	± 0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$1-0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pm\infty$	2	$\frac{3}{2}$	$1+0$

(3) この表を使ってグラフの概形を書くと下のようになる.



問題 2. (1) $\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x - 3 \neq 0$ としてよいから約分ができて

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x+2$$

ここで $x \to 3$ とすると

$$\to 5.$$

だから,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 5.$$

また

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = x+2 \to 5 \quad (x \to 3).$$

でもよい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x \neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

ここで $x \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{x+1} \to \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

だから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x} = 0.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x \neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

ここで $x \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to \frac{1}{1+0} = 1.$$

だから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = 1.$$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから，不定形でなくなるように変形を行ってから極限を求める．

$\displaystyle\frac{(2+h)^2-4}{h}=\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}$

$h\neq 0$ としてよいから約分ができて

$=4+h$

ここで $t\to 0$ とすると

$\to 4.$

だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

または

$$\frac{(2+h)^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=(4+h)\to 4$$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$

または

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right)=\frac{-1}{2(2+h)}\to -\frac{1}{4}$$

問題 3 $\displaystyle\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^0=1$

問題 4 次の値を求めよ．

(1) $3^{2}=9$ だから $\log_3 9=2$

(2) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$ だから $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$

(3) $3^{0}=1$ だから $\log_3 1=0$

問題 5 (1) $\log_2 3\times\log_3 2=1.$

底の変換公式により $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{\log_2 3}$.

したがって $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$.

(2) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \times 3) = \log_6 6 = 1$.

(3) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

(4) $\log_3 \sqrt[3]{12} - \dfrac{2}{3} \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{3 \times 2^2} - \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \log_3 \left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) = \log_3 3^{\frac{1}{3}} =$

$\dfrac{1}{3}$.