解析基礎 第１回　解答

記号の使い方に気を付けて筋の通った書き方をしてください。

問題 1. 次の数列の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 = +\infty$　なぜなら

$n \leqq n+1$ より $n^2 \leqq (n+1)^2$, また $n \leqq n^2$ あわせて $n \leqq (n+1)^2$, ところで $n \to +\infty$. だから $(n+1)^2 \to +\infty$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$　なぜなら,

$$
\begin{aligned}
&n \geqq 10^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 10,\\
&n \geqq 100^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 100,\\
&n \geqq 1000^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geqq 1000,\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

(3) $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$　$(1, 1, 1, \cdots$ という数列の極限$)$

(4) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は存在しない。実際 $-1, 1, -1, 1, \cdots$ という数列は一定の実数に近づいてくとは言えない。

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{1}{2(+\infty)-1} = \dfrac{1}{+\infty-1} = \dfrac{1}{+\infty} = +0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}$ はこのままでは $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形になるので分母分子を n で割ってそれを避ける。

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

問題 2. (1) $\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{または} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0.$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0,\ \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ は不可.

(2) $\dfrac{3}{2} > 1$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, または $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to +\infty$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ は不可.

(3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を 2^n でわると,

$$\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2}{1+\frac{3^n}{2^n}} = \frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

また $n\to\infty$ とすると $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ だから,

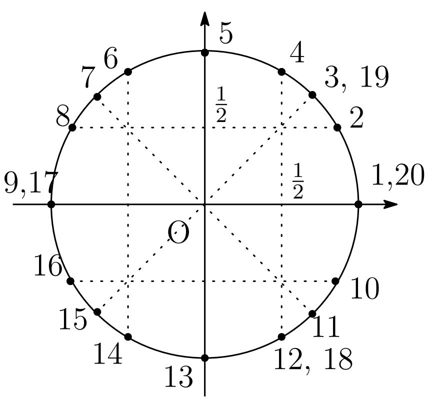
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{2}{1+\infty} = 0,$$

または

$$\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to \frac{2}{1+\infty} = 0.$$

この 2 種類の表現法を混ぜないこと

問題 3.



(16 から 20 は無視してください。)

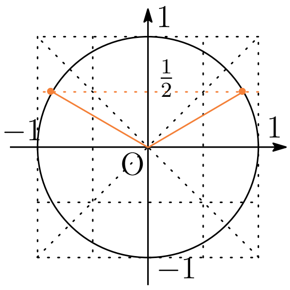
問題 4.

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
度数	0	$\pm30°$	$\pm45°$	$\pm60°$	$\pm90°$	$\pm120°$	$\pm135°$	$\pm150°$	$180°$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	±1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	±1	$\pm\sqrt{3}$	定義できない	$\mp\sqrt{3}$	∓1	$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

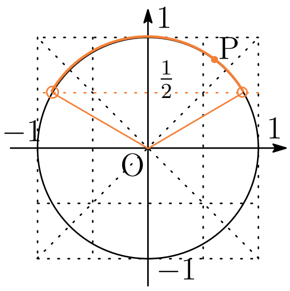
問題.5

(1) $2\sin\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta = \frac{1}{2}$

これと **問題.3** の答えの図を比較して $\theta = \frac{\pi}{6}$ と $\frac{5\pi}{6}$.



(2) $\sin\theta > \frac{1}{2}$



図において, P は単位円周上を A から θ ラジアン回転した点とする. このとき P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である.

$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$

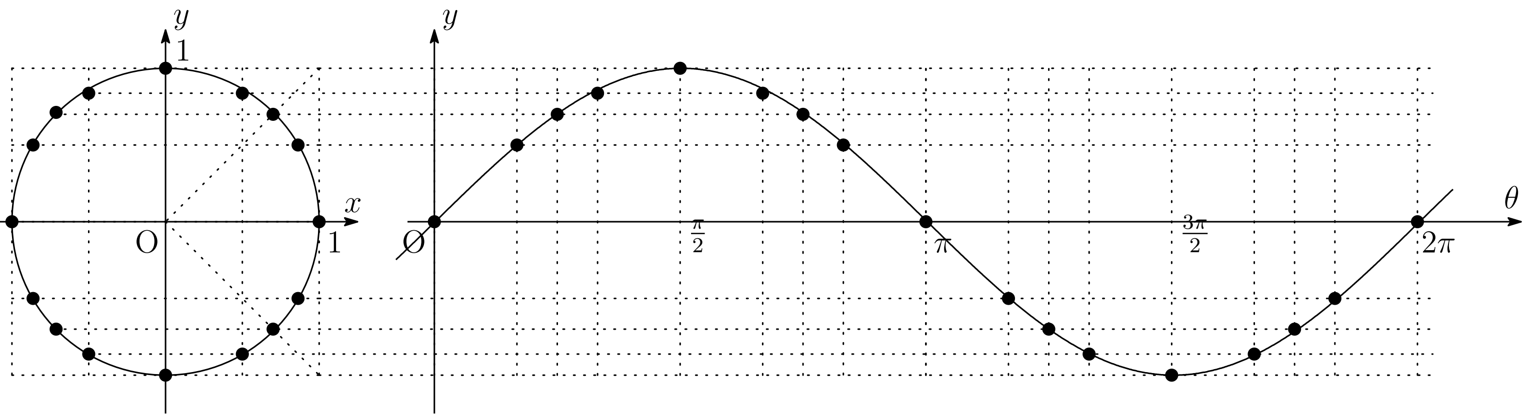
であるとき P は図の太線の部分にあるので前問の結果を使って

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}.$$

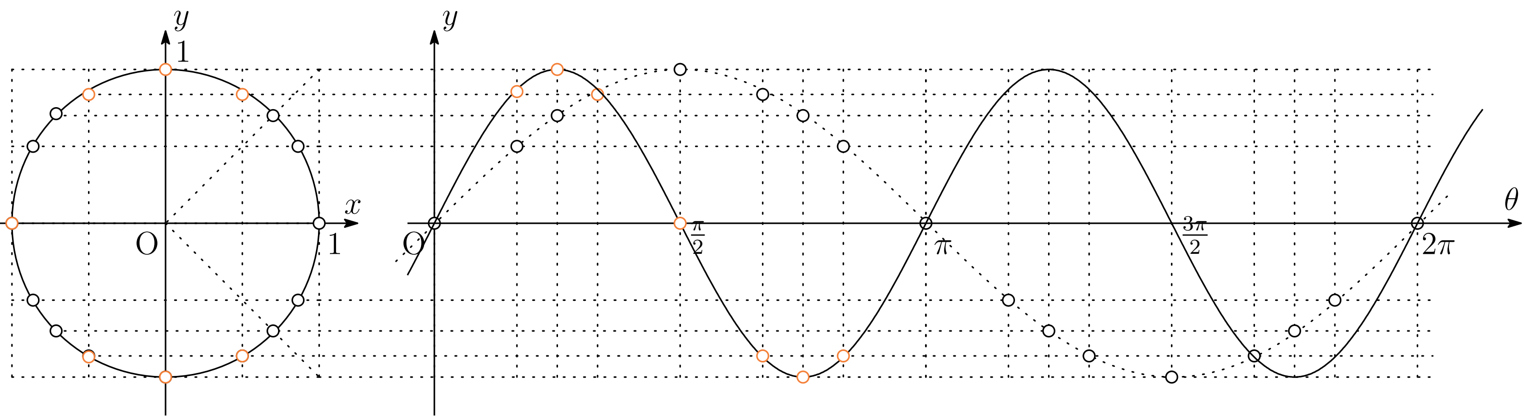
であることが分かる.

問題.6　次の目盛りを用いてグラフを描け.

(1)　$y = \sin\theta$



(2)　$y = \sin 2\theta$



(3) $y = 2\sin\theta$