基礎解析 期末試験 解説

注意 1. カッコをさぼるな。

かけ算わり算はたし算引き算より先にやるという約束があるから,

$2x - 1e^x = 2x - e^x$

となる。$2x-1$ を先に計算してほしかったら

$(2x-1)e^x = 2xe^x - e^x$ と書け。

2. $=$ を正しく使え。

$A = B$ とは A と B が等しいということを表す記号である。

$y = (x^2 - x + 1)^4 = t^4 = 4t^3 = 4(x^2 - x + 1)^3$

は不可。

1. 次の関数の導関数を求めよ.

（スライド第 4 回 16 ページ以降を見よ。）

(1) $y = (x^2 - x + 1)^4$

$t = x^2 - x + 1$ とおくと, 関数 $y = (x^2 - x + 1)^4$ は関数 $y = t^4$, $t = x^2 - x + 1$ の合成関数と見ることができる.

$y = t^4$ だから $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^4) = 4\,t^3$

$\left(\dfrac{dy}{dt}\right.$ は y を t の関数とみて微分した導関数$\left.\right)$

$t = x^2 - x + 1$ だから $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - x + 1) = (x^2)' - (x)' + (1)' = 2x - 1$

$\left(\dfrac{dt}{dx}\right.$ は t を x の関数とみて微分した導関数$\left.\right)$

だから合成関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 4\,t^3 \times (2x-1) = 4(2x-1)(x^2-x+1)^3$$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right.$ は t を x の関数とみて微分した導関数だから y' と同じ$\left.\right)$

である.

$y' = (2x-1)^5$ $y' = 5(x^2 - x + 1)^4$ $y' = 5(2x-1)^4$ はどれも誤り!

(2) $y=\sqrt{2x-3}$

$t=2x-3$ とおくと関数 $y=\sqrt{2x-3}$ は二つの関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-3$ の合成関数と見ることができる.

$y=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ だから $\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$t=2x-3$ だから $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(2x-3)=2$

だから合成関数の微分法により

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

となる.

(3) $y=e^{2x}\cos(3x)$

(a) まず関数 e^{2x} の導関数を求める。$y=e^{2x}$, $2x=t$ とおくと関数 $y=e^{t}$, $t=2x$ の合成関数とみることができる.

$\dfrac{dy}{dt}=e^{t}, \qquad \dfrac{dt}{dx}=2$

だから合成関数の微分法により

$(e^{2x})'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=e^{t}\times 2=2\,e^{2x}$

となる.

(b) 同様に $3x=t$ とおいて

$(\cos(3x))'=\dfrac{d}{dx}\cos(3x)=\dfrac{d}{dt}\cos t\dfrac{dt}{dx}=-\sin t\times 3=-3\sin(3x)$

(c) (a), (b) と積の微分法により

$$\begin{aligned} y'&=(e^{2x}\cos(3x))'=(e^{2x})'\cos(3x)+e^{2x}(\cos(3x))'=2e^{2x}\cos(3x)+e^{2x}(-3\sin(3x))\\ &=e^{2x}(2\cos(3x)-3\sin(3x)) \end{aligned}$$

(4) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

商の微分法により

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{1+\cos x} \end{aligned}$$

(5) $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$

商の微分法をつかう。

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)' = \frac{(x-2)'(2x+1) - (x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1) - 2(x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

($\frac{(2x+1)-2(x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{1-2(x-2)}{(2x+1)}$ はとんでもない大間違い。)

(6) $y = \sqrt{x^2+a^2}$ $(a > 0$ は定数$)$

$t = x^2 + a^2$ とおく．関数 $y = \sqrt{x^2+a^2}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+a^2$ の合成関数である．

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2+a^2) = 2x$ (a は定数であるから $(a^2)' = 0$ であり, $2x+2a$, $2x+a^2$ は誤り)

でありまた (2) と同様に

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である．だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

となる．

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$, $\quad f''(x) = 6x + 6$

(2) 次の増減表を完成させよ. ($\cdots$ は区間を表すので, 書き込まないこと.)

(増減を調べる) $f'(x) = 3x(x+2)$ であり, $f'(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0$ のときだから $f'(x)$ の符号が変わる境目は $x = -2, 0$ の他にない。

$x < -2$ のとき $3x < 0$, $(x+2) < 0$ だから $f'(x) > 0$, したがってこの区間で狭義単調増加

$-2 < x < 0$ のとき $3x < 0$, $(x+2) > 0$ だから $f'(x) < 0$. したがってこの区間で狭義単調減少

$0 < x$ のとき $3x > 0$, $(x+2) > 0$ だから $f'(x) > 0$. したがってこの区間で狭義単調増加

$f(-2) = 2$, $f(0) = -2$

(凹凸を調べる) $f''(x) = x + 1$ だから

$x < -1$ のとき $f''(x) < 0$, したがってこの区間で上に凸

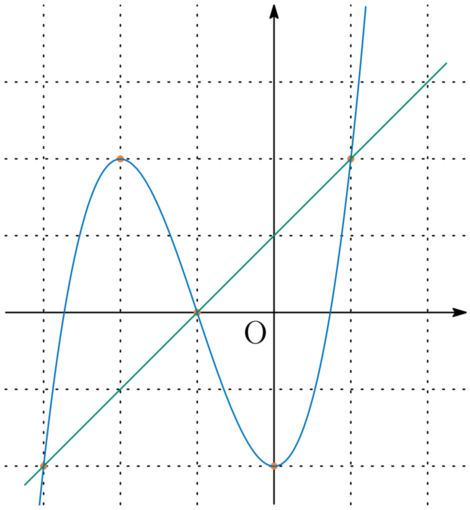
$x = -1$ のとき $f(x) = 0$, $(-1, 0)$ は変曲点。

$x > -1$ のとき $f''(x) > 0$, したがってこの区間で下に凸

まとめると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ. (目盛の間隔は 1 とする.)



(4) $y=f(x)$ と $y=x+1$ の交点の座標を求め, $y=x+1$ を (3) の図に書き込め。

交点の座標 (x,y) は連立方程式 $\begin{cases} y=x^3+3x^2-2 \\ y=x+1 \end{cases}$ の解であるからこれを解いて $(-3,-2)$, $(-1,0)$, $(1,2)$.

(5) $y=f(x)$ と $y=x+1$ で囲まれる部分のうち, $y=f(x)$ が上にある部分の面積を求めよ。

この部分は $-3 \leqq x \leqq -1$ の範囲にあるから積分の範囲も -3 から -1 まで。
この範囲では $y=f(x)$ のほうが上にあるから $f(x)-(x+1)$ を積分する。

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^{-1}\{(x^3+3x^2-2)-(x+1)\}\,dx\\&\quad=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)\,dx\\&\quad=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}\\&\quad=4\end{aligned}$$

3 次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2x^2 - 3x)\,dx$

まず不定積分を計算して原始関数を求める。積分定数は省略する。

$$\int (2x^2 - 3x)\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int x\,dx = 2 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

だから原始関数は $\dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$ これを用いて定積分を計算する。

$$\int_1^3 (2x^2 - 3x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 - \frac{3}{2}1^2\right) = \frac{16}{3}$$

定積分と不定積分を区別すること。分数の計算を慎重に行うこと。

(2) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx$

(不定積分を計算して原始関数を求める。) $4x + 1 = t \cdots (\star)$ とおいて置換積分するしか方法はない。$(\star)$ の両辺を x で微分すると

$$4 = \frac{dt}{dx}$$

この両辺に $\dfrac{dx}{4}$ をかけると

$$dx = \frac{dt}{4}$$

これらで置換積分を行うと

$$\int \sqrt{4x+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$$

だから原始関数は $\dfrac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$.

(定積分を計算する)

$$\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx = \left[\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \left(\frac{1}{6}(4\cdot 2+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{6}(0+1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{13}{3}$$

(別解) また

$$x = 0 \text{ のとき } t = 1, \quad x = 2 \text{ のとき } t = 9$$

に注意して直接

$$\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx = \int_1^9 \sqrt{t}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \left[\frac{1}{6}\,t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \left(\frac{1}{6}\,9^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{6}\,1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{13}{3}$$

としても同じことである。ただし, x 積分の範囲と t 積分の範囲は区別すること。

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

部分積分法を使う。

(a) まず $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$ を計算しておく。$2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin 2x$$

(b) (a) より $\cos 2x = \left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'$ だから部分積分法により

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'\,dx \\
&= \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\,dx
\end{aligned}$$

(a) と同様に $\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned}
&= \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x(2x-1)^4\,dx$

$2x - 1 = t \cdots (\star)$ とおいて置換積分する。

$(\star)$ の両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ をかけると

$$dx = \frac{dt}{2}$$

また

$$x = \frac{t+1}{2}$$

$$x = 0 \text{ のとき } t = -1, \quad x = 1 \text{ のとき } t = 1$$

これらで置換積分を行うと

$$\int_0^1 x(2x-1)^4\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{t+1}{2}\,t^4\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (t^5 + t^4)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1^6}{6} + \frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{(-1)^6}{6} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right\} = \frac{1}{10}$$

(別解) $\displaystyle\int (2x-1)^4\,dx = \frac{1}{10}(2x-1)^5$ を利用して部分積分する。

$$\int_0^1 x(2x-1)^4\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)'\,dx$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)\,dx$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{10}(2x-1)^5\right)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{120}(2x-1)^6\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{10}$$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$

$\displaystyle\int e^{-2x}\,dx = \frac{1}{-2}e^{-2x}$ だから

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{-2}e^{-\infty} - \frac{1}{-2}e^{0} = \frac{1}{2}$$

4 (1) $x = 2\tan t, \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくとき

$$x^2 + 4 = \frac{4}{\cos^2 t}$$

$$dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt \quad (t \text{ で表せ })$$

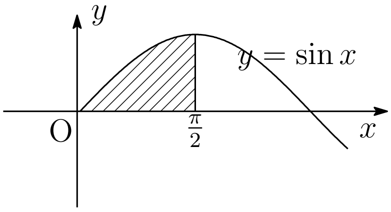
(2)

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{\cos^2 t}{4}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty)\right) = \frac{\pi}{2}$$

5 図のような図形を x 軸の周りで 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.



$$\pi\int_0^{\pi 2} \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi 2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$