# 本日やること

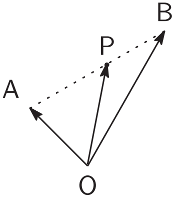
- ベクトルの 1 次独立性

1. 行列の対角化
   - 復習：固有値・固有ベクトルの定義
   - 行列の対角化の定義
   - 対角化可能となる条件

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

[直線上の点]




点 P が直線 AB 上にある

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t + s = 1$ となる実数 $t$, $s$ がある。

(このとき P は AB を $t : s$ に内分または外分する。)

だから A≠B のとき次の (i), (ii), (iii) は同値。

(i) 直線 AB 上が原点 O をふくむ

(ii) $\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t + s = 1$ となる実数 $t$, $s$ がある。

(iii) $\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t + s = r \neq 0$ となる実数 $t$, $s$, $r$ がある。

(iv) $\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ となる実数 $t$, $s$ がある。

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

**2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)**

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が

1 次独立であるとは O, A, B が同一直線上にないこと。

1 次従属であるとは O, A, B が同一直線上にあること。

と定める。

前の述べたことから

**2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)**

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立である とは「$\vec{\mathbf{0}} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; t = s = 0$」であること

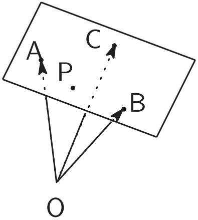
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属である とは

「$\vec{\mathbf{0}} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$, ($t \neq 0$ または $s \neq 0$) となる $t$, $s$ がある」こと

といっても同じことである。

# 行列式
## ベクトルの 1 次独立性

[平面上の点]




点 P が A B C を含む平面上にある

$\Longleftrightarrow$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $t+s+r=1$ となる実数 $t$, $s$, $r$ がある。

だから A, B, C がすべて異なるとき

A B C を含む平面が原点 O をふくむ

$\Longleftrightarrow$

$\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ または $r \neq 0$ となる実数 $t$, $s$, $r$ がある。

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

**3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)**

3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が

独立であるとは O, A, B, C が同一平面上にないこと。

1 次従属であるとは O, A, B, C が同一平面上にあること。

と定める。

前述のことにより

**3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)**

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次独立 $\iff$ 「$\vec{\mathbf{0}} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} \Rightarrow t = s = r = 0$」

といっても同じことである

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

**$n$ 個のベクトルの 1 次独立性の定義**

$n$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であるとは

「$\vec{\mathbf{0}} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{a}_n \Rightarrow t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ 」であること。

1 次従属であるとは 一次独立でないこと。

と定める。

$n = 2, 3$ のときは前述したものと一致する。

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ の列ベクトルを } \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

とする．このとき

**1 次独立性の条件**

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ が正則

行ベクトルについても同様である。

# 行列式

## ベクトルの 1 次独立性

[確かめ] 第 13 回に述べたように

$\boldsymbol{A}$ が正則 $\iff$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{a}_n = \vec{\mathbf{0}}$$ が $t_1 = \cdots = t_n = 0$ 以外の解を持たない

だから明らか。

# 固有値・固有ベクトル

## 復習：固有値・固有ベクトルの定義

**復習：固有値・固有ベクトルの定義**

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し列ベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}$, 複素数 $\lambda$ が

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}, \quad \vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$$

となるとき

$\lambda$ ： $\boldsymbol{A}$ の固有値

$\vec{\boldsymbol{x}}$ ： 固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトル

という。

**復習：固有値を求める方法**

固有値 $\lambda$ は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$ の解である。

# 行列の対角化

## 行列の対角化の定義

### 行列の対角化の定義

$n$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が対角化可能であるとは

$\boldsymbol{P}$ : $n$ 次正則行列

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ : 複素数

があって

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となること。

$\boldsymbol{P}$ を対角化行列という

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

**対角化可能となる条件**

$n$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について次の (i), (ii) は同値である：

(i)　$\boldsymbol{A}$ は正則行列 $\boldsymbol{P}$ によって対角化可能である.

(ii)　$\boldsymbol{A}$ は $n$ 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つ.

このとき $\boldsymbol{P}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の間には

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

の関係があり, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は固有値となる。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

[(i)⇒(ii) の確かめ]

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots (\star\star)$$

ここで $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $(\star)$ で決めると

$$(\star\star) \text{ の左辺} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

$$(\star\star)\ \text{の右辺} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

両辺を比較して　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n = \lambda_n \boldsymbol{u}_n$　だから $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は固有ベクトル。
さらに $\boldsymbol{P}$ が正則であることにより $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は線形独立.

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

[(i)$\Leftarrow$(ii) の確かめ] ：(i)$\Rightarrow$(ii) の確かめを逆に追っていけばよい。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

[例題 6]

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し, 可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

を解いて固有値は $\lambda = 1$(2 重解), $-2$.

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left( \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

必ず不定となる

だから

$$x_1 \text{は任意}, \ x_2 + x_3 = 0$$

と同値だから解は $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ とおいて

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$c_1$, $c_2$ は 0 でない任意の数

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 2-2)　$\lambda = -2$ に対する固有ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left( \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_3 \text{ は 0 でない任意の数}$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化する。

(Step 2-1) より $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの組で, 1 次独立である。

(Step 2-2) より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルである。

得られた固有ベクトルを並べて

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を作る。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

$$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

だから $\boldsymbol{P}$ は正則, したがって $\boldsymbol{A}$ は対角化可能。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 4) 検算する。$\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これを用いて

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

[例題 6]

(2) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し, 可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1+2-\lambda & 1+(1-\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1+2-\lambda & 1+(1-\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & \lambda^2-3\lambda+3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2-3\lambda+3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\{\lambda^2-3\lambda+3-1\} \\
&= -(1-\lambda)^2(\lambda-2) = 0
\end{aligned}
$$

を解いて固有値は $\lambda = 1$(2 重解)$, 2$.

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

# 行列の対角化
## 対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = x_2,\ x_3 = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1 \text{ は 0 でない任意の数}$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 2-2)　$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_3$$

$$\vec{x} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_2 \text{ は 0 でない任意の数}$$

# 行列の対角化

## 対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化可能性の判定。 線形独立な固有ベクトルが 2 個しか作れないから対角化可能ではない。