本日やること

1. 行列式
   - 連立 1 次方程式の解法（クラメルの公式）
2. 連立 1 次方程式と行列
   - Gauss-Jordan の消去法
   - 連立方程式の行列を用いた解法
   - 掃き出し法と階段行列
   - 掃き出し法による逆行列の求め方
   - 行列の階数

行列式

復習：行列式の定義

[復習：行列式の定義]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \cdots, n$

とするとき $\boldsymbol{a}_j$ を $j = 1, 2, \cdots, n$ について組み合わせ乗積し, 展開・整理して

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n \quad \cdots (\star)$$

となるように $\boldsymbol{A}$ の行列式を決めたのであった。

$\boldsymbol{A}$ の行列式を $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$ とも表す.

行列式
連立 1 次方程式の解法

[復習：連立 1 次方程式の解法]

$$(P) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

を組み合わせ乗積を用いて解きたい。

行列式

連立 1 次方程式の解法

$$(P) \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{(右辺を } \boldsymbol{b} \text{ とおく)}$$

$$\iff x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \cdots (\star\star)$$

$(\star\star)$ に左から $\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1}$, 右から $\boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n$ を乗積すると

$$\begin{aligned} & x_1\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n + \cdots \\ & \quad + x_j\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a}_j \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n + \cdots \\ & \qquad + x_n\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a}_n \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \\ & \qquad\quad = \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

行列式
連立 1 次方程式の解法

同じ項を含む乗積は $\mathbf{0}$ だから, 左辺は第 j 項のみが残って

$$\begin{aligned} & x_j \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a}_j \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \\ & \qquad = \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{j-1} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

行列式の定義 $(\star)$ により

$$x_j|A| = |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad \cdots(\star\star\star)$$

行列式

クラメルの公式

まとめると

クラメルの公式

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ のとき, 連立 1 次方程式 (P) の解は

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|\boldsymbol{A}|}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

である. ただし Δ_j は

$$\Delta_j = |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \quad : |\boldsymbol{A}| \text{ の第 } j \text{ 列を } \boldsymbol{b} \text{ で置きかえたもの}$$

これをクラメルの公式という。連立方程式の解の公式である。

連立 1 次方程式と行列

消去法

連立 1 次方程式を解くための, クラメルの公式とは別の方法を述べる。

組み合わせ乗積と行列式ではなく, 行列の変形（消去法）を用いる。

連立 1 次方程式と行列

消去法

等式の変形

$A, B, C, D, k \in \mathbb{R}$ とする。

(I) $A = B,\ C = D \ \Rightarrow \ A \pm C = B \pm D$

(II) $k \neq 0$ のとき 「$A = B \ \Leftrightarrow \ kA = kB$」

連立 1 次方程式と行列

消去法

連立方程式の解を変えない変形

(I) $k \neq 0$ とするとき

(x, y, z) が $ax + by + cz = 0$ の解

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) が $k(ax + by + cz) = 0$ の解

(II) $c \in \mathbb{R}$ とするとき

(x, y, z) が $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \cdots ② \end{cases}$ の解

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) が

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ (a_2x + b_2y + c_2z) + c(a_1x + b_1y + c_1z) = 0 \cdots ② + c① \end{cases}$ の解

連立 1 次方程式と行列

消去法

[例題]　(1) から (7) の解は変わらない:

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 & \text{第 3 式と入れ替え} \\ 4x-y-z=5 & \\ x-y+2z=2 & \text{第 1 式と入れ替え} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 4x-y-z=5 & (\text{第 1 式})\times 4 \text{ をひく} \\ 3x+y-7z=0 & (\text{第 1 式})\times 3 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 3y-9z=-3 & \times \dfrac{1}{3} \\ 4y-13z=-6 & \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

$$(4)\quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ \quad\ \ y - 3z = -1 \\ \quad 4y - 13z = -6 \end{cases}$$

(第 2 式) をたす

(第 2 式)×4 をひく

$$(5)\quad \begin{cases} x \qquad - z = 1 \\ \quad\ \ y - 3z = -1 \\ \qquad\ - z = -2 \end{cases}$$

$\times(-1)$

$$(6)\quad \begin{cases} x \qquad - z = 1 \\ \quad\ \ y - 3z = -1 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases}$$

(第 3 式) をたす

(第 3 式)×3 をたす

$$(7)\quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

ガウス・ジョルダンの消去法

ガウス・ジョルダンの消去法

連立方程式に対して

(I) 1 つの式に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの式に実数をかけたものを他の式に加える (または引く)

(III) 2 つの式を入れ替える

ことをしても解が変わらないことを利用して

$$\begin{cases} x = * \\ y = * \\ z = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法を**ガウス・ジョルダンの消去法**という。

連立１次方程式と行列

行列を用いた解法

係数行列・拡大係数行列

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 \\ 4x-y-\ \ z=5 \\ \ \ x-y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ とおく。係数行列という。

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ とおく。これを拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

行基本変形

拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

ガウス・ジョルダンの消去法を係数のみ取り出して実行したことになるから明らかである。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

[例題 1]　次の連立方程式を Gauss-Jordan の消去法を用いて解く。

$$(\star)\quad \begin{cases} 2x+\ y-5z=-1 \\ \ x-\ y+\ z=\ 0 \\ 3x-6y+2z=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列のみに着目して行基本変形する。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{2 行と入れ替え} \\ \text{1 行と入れ替え} \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{1 行を 2 倍して引く} \\ \text{1 行を 3 倍して引く} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{2 行を } \frac{1}{3} \text{ 倍してたす} \\ \\ \text{2 行をたす} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{8} \text{ 倍する} \end{array}$$

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{3 行を } \frac{4}{3} \text{ 倍してたす} \\ \text{3 行を 7 倍してたす} \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \text{ 倍する}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\star) \iff \begin{cases} x & & & =1 \\ & y & & =2 \\ & & z & =1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

[注意]

1. ガウスの消去法は 未知数 n 個, 方程式 m 個の場合でも同様にできる。
2. $n > m$ でも解がないとは限らないし $n < m$ でも解があるとは限らない。また、解は一組であるとも限らない。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法

拡大係数行列 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ において条件

$P(i,j)$：(i) $a_{ij} \neq 0$,
(ii) $a_{i1} = \cdots = a_{i\,j-1} = 0$ （$j=1$ のときは満たされていると考える）

を満たすとき

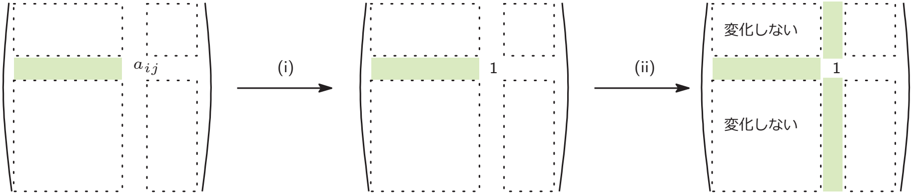
$Q(i,j)$ ：(i) 第 i 行を a_{ij} で割る,
(ii) 第 k 行 ($i \neq k$) から第 i 行の a_{kj} 倍を引く

ということを行うと

$a_{ij} \to 1,\quad a_{kj} \to 0,\ (i \neq k),$　第 1 列から第 $j-1$ 列は変化しない。

のように変形される。この手続きを a_{ij} を要（かなめ・Pivot）として第 j 列を掃き出すという。

連立 1 次方程式と行列
掃き出し法



(緑は成分が 0 であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法（その 2）

この手続きを第 1 列から始めて, 次のように繰り返す。

1. 最初の Pivot の選び方：
   (1.1) 第 1 列の成分のうち 0 でないものを選び, 行を入れ替えて第 1 行に持ってきて, これを Pivot として第 1 列を掃き出す。

   (1.2) 第 1 列の成分がすべて 0 のときは, 第 2 列で前項のことを行う。以下同様。

2. 前段階の Pivot が a_{ij} であるときの次の Pivot の選び方：
   (2.1) $j+1$ 列から $P(i,j+1)$ を満たすものをさがし, 行の入れ替えで $(i+1,j+1)$ 成分に持ってきて, これを Pivot にして第 $j+1$ 列を掃き出す。

   (2.2) $a_{i+1\,j+1},\cdots,a_{m\,j+1}$ がすべて 0 であるときは第 $j+2$ 列に移って前項のことを行う。以下同様。

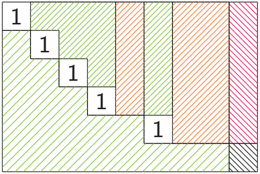
3. j が n に達したらやめる。右端の列は掃き出さない。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法（その 3）

このことにより次のような階段行列



は 0

 は 0 とはかぎらない

 は掃き出してはいけない

に変形することができる。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1)\quad \begin{cases} x+ \quad +3z =1 \\ 2x+3y+4z =3 \\ x+3y+ \ z =2 \end{cases}$$ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(1) \iff \begin{cases} x \quad + \quad 3z = \ 1 \\ \qquad y-(2/3)z =1/3 \\ 0x+0y+ \quad 0z = \ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ + \quad 3z = \ 1 \\ \ y-(2/3)z =1/3 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが, $z = t$ とおくことによりすべての解は

$$\iff \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。

連立１次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

$$(2)\quad \begin{cases} x+\quad +3z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ x+3y+\ z=3 \end{cases}$$ の拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(2) \iff \begin{cases} x \quad + \quad 3z = 1 \\ \quad y-(2/3)z = 1/3 \\ 0x+0y+\quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff$ A は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

[確かめ]

$$(\star)\quad \underset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}} = \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

を満たす X を求めよう。

$$(\star) \iff \begin{cases} ax+bz = 1 \\ cx+dz = 0 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} ay+bw = 0 \\ cy+dw = 1 \end{cases}$$

だから二つの拡大係数行列をまとめて行基本変形して

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\clubsuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ となったとすると}$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

である。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

$XA = E$ であることを示す。そのため $XY = E$ となる Y を求めたい。そのために ♣ と逆の行基本変形 ♠ を行うと

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\spadesuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

となるので $Y = A$。したがって $XA = E$ となり $AX = E$ と合わせて $X = A^{-1}$ であることがわかる。

ただし逆の行基本変形というのは

(I) 「ある行に 0 でない数 a をかける。」に対して「その行に $\frac{1}{a}$ をかける。」

(II) 「第 i 行に実数 c をかけたものを第 j 行に加える」に対して「第 i 行に実数 $-c$ をかけたものを第 j 行に加える」

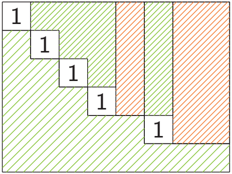
(III) 「第 i 行と第 j 行を入れ替える」に対して「第 i 行と第 j 行を入れ替える」

を逆の順序で行うこと。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

行列の階数



 は 0

 は 0 とはかぎらない

のような行列を階段行列という。0 でない行の数を階段行列の階数という。$m \times n$ 型行列 A が行基本変形により階段行列に変形されるとき、変形された階段行列の階数はもとの行列により決まってくる。この数を A の階数といい $\mathrm{rank}(A)$ で表す。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(\tilde{A}) \ \Rightarrow$ 連立方程式は解を持たない。

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A}) \ \Rightarrow$ 連立方程式は解を持つ。

$m = n = \mathrm{rank}(A) \ \Leftrightarrow$ 連立方程式は右辺によらず常にただ一つの解を持つ。