本日やること

1. 行列式
   - 行列式の性質
   - 行列式の展開
   - 余因子・余因子行列
   - 行列式と逆行列

行列式
行列式の性質

行列の積の行列式

A, B : (n 次) 正方行列のとき

$$|AB| = |A||B| \qquad (|A+B| = |A| + |B| \text{ は誤り})$$

[確かめ] $n = 3$ の場合で説明する。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$$

とする。

行列式
行列式の性質

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + a_{3j}\boldsymbol{e}_3 \cdots \text{(a)} \quad \boldsymbol{b}_j = b_{1j}\boldsymbol{e}_1 + b_{2j}\boldsymbol{e}_2 + b_{3j}\boldsymbol{e}_3 \cdots \text{(b)}$$

を $j = 1, 2, 3$ について組み合わせ乗積し, 展開・整理して

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \quad \cdots \text{(A)}$$
$$\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \boldsymbol{b}_3 = |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \quad \cdots \text{(B)}$$

同様に (b) に A をかけた

$$A\boldsymbol{b}_j = A(b_{1j}\boldsymbol{e}_1 + b_{2j}\boldsymbol{e}_2 + b_{3j}\boldsymbol{e}_3) = b_{1j}A\boldsymbol{e}_1 + b_{2j}A\boldsymbol{e}_2 + b_{3j}A\boldsymbol{e}_3$$

を $j = 1, 2, 3$ について組み合わせ乗積し, 展開・整理すると (B) と同様に

$$A\boldsymbol{b}_1 \wedge A\boldsymbol{b}_2 \wedge A\boldsymbol{b}_3 = |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3| A\boldsymbol{e}_1 \wedge A\boldsymbol{e}_2 \wedge A\boldsymbol{e}_3$$

$A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j$ と (A) より

$$= |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3| \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3$$
$$= |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3||\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \cdots (\star)$$

行列式
行列式の性質

一方
$$AB = A(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3)$$
だから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ab}_1 \wedge A\boldsymbol{b}_2 \wedge A\boldsymbol{b}_3 &= |A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &= |AB| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \cdots (\star\star) \end{aligned}$$

$(\star)$ と $(\star\star)$ を比較して

$$|AB| = |\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3||\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| = |A||B|$$

行列式
行列式の性質

行列が正則であるための必要条件

正方行列 A が正則（つまり逆行列 A^{-1} を持つ）$\Longrightarrow$ $|A| \neq 0,\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

[確かめ]

$$AA^{-1} = E$$

だから

$$|AA^{-1}| = |E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

一方

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

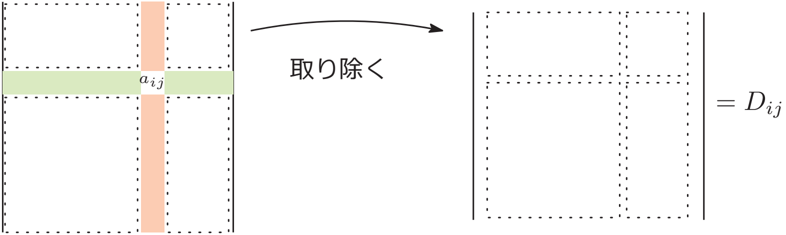
だから。

行列式

行列式の展開

小行列式の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ に対して第 i 行 j 列の成分を取り除いてできる行列の行列式



を $|A|$ の (i, j) 成分の小行列式という。

行列式
行列式の展開

[復習] 第 7 回の例題 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式

行列式の展開

行列式の第 1 行に関する展開

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n}$$

[確かめ] $n = 3$ の場合で説明する。

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (a_{11}, 0, 0) + (0, a_{12}, 0) + (0, 0, a_{13})$ だから

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式

行列式の展開

ところで

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} D_{11}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) a_{12} D_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{13} (-1)^2 D_{13}$$

だから分かった。

行列式

行列式の展開

行列式の第 i 行, 第 j 列に関する展開

(i) $|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in}$

(ii) $|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}$

[(i) の確かめ] 行の入れかえを繰り返して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

あとは第 1 行に関して展開すればよい。

行列式
行列式の展開

余因子・余因子行列の定義

$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を $|A|$ の (i, j) 余因子とよぶ。

$\tilde{\boldsymbol{A}} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ を $\boldsymbol{A}$ の余因子行列とよぶ。

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ の (i, j) 成分を $\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ と書くと $\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ となることに注意。

行列式

余因子・余因子行列

[復習：行列式の第 i 行, 第 j 列に関する展開]

(i) $|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in}$

(ii) $|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}$

であったがこれを余因子で書き直すと

$$\text{(i)} \quad |A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} \cdots (\star)$$

$$\text{(ii)} \quad |A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} \cdots (\star\star)$$

が得られる。さらに

行列式

余因子・余因子行列

余因子の性質

(i) $a_{i'1}\tilde{a}_{i1} + a_{i'2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{i'n}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{i'k}\tilde{a}_{ik} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & i = i' \text{のとき} \\ 0 & i \neq i' \text{のとき} \end{cases}$

(ii) $a_{1j'}\tilde{a}_{1j} + a_{2j'}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj'}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj'}\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & j = j' \text{のとき} \\ 0 & j \neq j' \text{のとき} \end{cases}$

行列式

余因子・余因子行列

[(i) の確かめ]

$$(\mathrm{i})\text{ の左辺} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'j} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

だから $|\boldsymbol{A}|$ の第 i 行を 第 i' 行で置き換えたものである。したがって

$i = i'$ のときは $(\star)$ により $|\boldsymbol{A}|$ に一致。

$i \neq i'$ のときは 第 i' 行と 第 i 行 が一致するので行列式の性質により 0.

(ii) も同様。

行列式

余因子・余因子行列

補題：余因子行列の性質

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} \quad (\boldsymbol{E} \text{ は単位行列})$$

[確かめ]

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} \text{の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{\boldsymbol{A}}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

だから $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ も同様。

行列式
行列式と逆行列

定理：逆行列を持つことの必要十分条件, 逆行列の作り方

正方行列 $\boldsymbol{A}$ が正則 $\iff |\boldsymbol{A}| \neq 0$

このとき

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}$$

[確かめ]

$\Rightarrow$ はすでにやった。

$\Leftarrow$ は補題より明らか。