# 本日やること

1. 行列式
   - 行列式の定義
   - 行列式の性質
   - 行列式の図形的意味

# 行列式

## 復習：行列式の定義

**復習：$n$ 次行列式の定義**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \displaystyle\sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \cdots ① \\ \text{または} \\ \displaystyle\sum_Q \varepsilon_Q a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} \cdots ② \end{matrix}$$

ここで $\displaystyle\sum_P$, $\displaystyle\sum_Q$ は $P$, $Q$ がすべての順列を亘るときの和。①, ② は等しいのでどちらを用いてもよい。

# 行列式

## 復習：行列式の定義

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき $|A|$ とも表す。

列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \cdots, n$

とおくと $|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$ とも表す。

# 行列式

## 復習：行列式の定義

[考え方]

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots a_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

を $j = 1, 2, \cdots, n$ について組み合わせ乗積し，展開・整理したとき

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n \quad \cdots (\star)$$

となるように定義したのである。

# 行列式

## 行列式の性質

**転置行列の行列式（教科書 P.91）**

$A$ が正方行列であるとき $|{}^tA| = |A|$.

[確かめ]

$B = {}^tA$ とし, $A$, $B$ の $i$ 行 $j$ 列の成分をそれぞれ $a_{ij}$, $b_{ij}$ とすると行列式の定義より

$$|A| = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad \text{(定義の①を用いた)}$$

$$|B| = \sum_P \varepsilon_P b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n} \quad \text{(定義の②を用いて } Q \text{ を } P \text{ に置き換えた)}$$

ところで $b_{ji} = a_{ij}$ だから 2 つは一致する.

# 行列式
## 行列式の性質

例題 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[確かめ]

$$左辺 = \sum_{P} \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$p_1 \neq 1$ ならば $p_2, \cdots, p_n$ のどれかは $= 1$ だから $a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$.
したがって $p_1 = 1$, $(p_2, \cdots, p_n)$ は $(2, \cdots, n)$ の順列としてよいので

$$= a_{11} \sum_{(p_2, \cdots, p_n)} \varepsilon_{(1, p_2, \cdots, p_n)} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$\varepsilon_{(p_2, \cdots, p_n)} = \varepsilon_{(1, p_2, \cdots, p_n)}$ だからこれは右辺に等しい.

# 行列式

## 行列式の性質

### 行列式の多重線形性

$c$ をスカラーとする。行列式の第 1 列ベクトルに関して

(I) $$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(II) $$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ほかの列、行に関しても同様。

# 行列式
## 行列式の性質

基本変形

(III)
$$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & b_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix}$$

(IV)
$$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

ほかの列、行に関しても同様。

# 行列式
## 行列式の性質

基本変形

(V) $$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 + cb_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 + cb_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n + cb_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix}$$

ほかの列、行に関しても同様。

# 行列式
## 行列式の性質

[(I) の確かめ] 行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき, 組み合わせ乗積の分配法則により

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}'_1) \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}'_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n$$

であるから, 行列式の作り方 $(\star)$ から明らか。 [(II) も同様]

[(III), (IV), (V) の確かめ] 組み合わせ乗積の性質により

$$\begin{aligned}
&\{\cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots\} = -\{\cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots\} \\
&\{\cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots\} = \boldsymbol{0} \\
&\{\cdots \wedge (\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots\} \\
&\qquad = \{\cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots\} + c\{\cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots\} \\
&\qquad = \{\cdots \wedge \boldsymbol{a} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b} \wedge \cdots\}
\end{aligned}$$

であるから, 行列式の作り方 $(\star)$ から明らか。

# 行列式
## 行列式の性質

[例題]

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{第 2 行と交換} \\ \text{第 1 行と交換} \\ \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{第 1 行 } \times 3 \text{ を引く} \\ \text{第 1 行 } \times 2 \text{ を引く} \\ \text{第 1 行 } \times 2 \text{ をたす} \end{matrix}$$

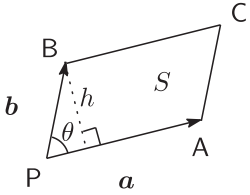
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 1 行 } \times 3 \text{ をたす} \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -11 & -10 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} = 30 - 55 = -25$$

# 行列式

## 行列式の図形的意味

### 平行四辺形の面積




PACB は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形で面積は $S$,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ のとき

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ の絶対値

# 行列式

## 行列式の図形的意味

[確かめ] $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$, 高さを $h$ とする.

$$S^2 = |\boldsymbol{a}|^2 h^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta$$

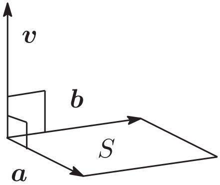
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だから

$$\begin{aligned}
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2 \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}$$

# 行列式

## 行列式の図形的意味

### 空間のベクトルの外積の定義




$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ : 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{v}$

(ii) $|\boldsymbol{v}| = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積 ($= S$ とおく)

(iii) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ がただ一つある。この $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積といい

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

であらわす。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ と定める。

# 行列式

## 行列式の図形的意味

### 外積の成分表示

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

# 行列式

## 行列式の図形的意味

[(i) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{v} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ も同様。

# 行列式

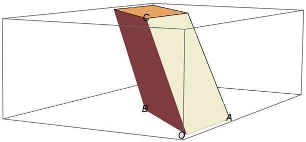
## 行列式の図形的意味

[(ii) の確かめ]

$$\begin{aligned}
S^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= |\boldsymbol{v}|^2
\end{aligned}$$

# 行列式
## 行列式の図形的意味

### 平行 6 面体の体積




$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

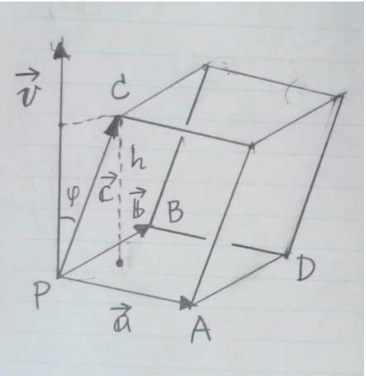
で張られる平行 6 面体の体積 $V$ は

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

# 行列式

## 行列式の図形的意味

[確かめ]




$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は右手系とする。

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\
&= |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cos\varphi \\
&= V
\end{aligned}$$