本日やること

1. 行列式
    - 行列式の定義

行列式

行列式の定義

[復習]

2 次の行列式の定義：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3 次の行列式の定義：

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\qquad = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad\qquad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

行列式

行列式の定義

2,3 次の行列式を計算するサラスの方法

2 次の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \boxed{a_1 b_2} - \boxed{a_2 b_1}$$

3 次の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$
$$\boxed{- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

4 次以上では正しくない。

行列式
行列式の定義

以下, n 次の行列式を構成する。

復習　2 次の行列式の作り方：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 = (a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2) \wedge (a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) \overset{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

であった。

行列式
行列式の定義

これにならって

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \overset{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n \quad \cdots (\star)$$

となるように n 次の行列式を決めたい。

行列式
行列式の定義

[n 次行列式の導出] $(\star)$ の左辺を展開してみよう。

$$\begin{array}{lcl}
(\star) \text{ の左辺} = & & \text{取り出す項} \\
(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } p_1 \text{ 項} = a_{p_1 1}\,\boldsymbol{e}_{p_1} \\
\quad \wedge (a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } p_2 \text{ 項} = a_{p_2 2}\,\boldsymbol{e}_{p_2} \\
\qquad \vdots & & \\
\quad \wedge (a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } p_n \text{ 項} = a_{p_n n}\,\boldsymbol{e}_{p_n}
\end{array}$$

取り出した項を乗積すると

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\,\boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \boldsymbol{e}_{p_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{p_n} \qquad \cdots (\star\star)$$

$p_1, \cdots, p_n$ に同じものがあったら $= \vec{0}$ となるから
　$P = (p_1, \cdots, p_n)$ は $\{1, \cdots, n\}$ を並べかえた順列
としてよい.

行列式

行列式の定義

並べ替えにより

$$\boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \boldsymbol{e}_{p_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{p_n} = \varepsilon_P \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$$

ただし

$$\varepsilon_P = \begin{cases} 1, & P \text{ は } (1, 2, \cdots, n) \text{ に (隣り合うものの) 入れ替えを} \\ & \text{偶数回行って得られる} \\ -1, & \text{奇数回行って得られる} \end{cases}$$

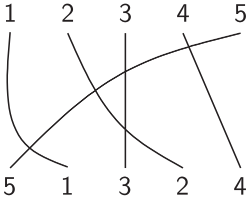
これを順列 P の符号という。これにより

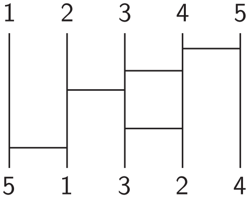
$$(\star\star) = a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \, \varepsilon_P \, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n \quad \cdots (\star\star\star)$$

ある順列 P を,「$(1, 2, \cdots, n)$ から (隣り合うものの) 入れ替えで作る方法は複数通りあるが, その入れ替えの回数は「すべて偶数回であるかすべて奇数回であるか」のどちらかである。

行列式
行列式の定義

[順列のあみだくじによる表示] 順列 $(1,2,3,4,5)$ を並べかえて $(5,1,3,2,4)$ を作る方法をあみだくじで表してみよう。





あみだくじの横線の数を r とするとき

$$\varepsilon_P = (-1)^r$$

である。あみだくじの作り方は複数あるが、r が偶数になったり奇数になったりすることはない。

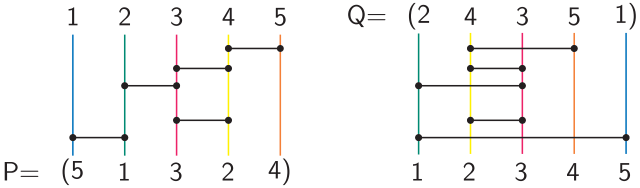
行列式

行列式の定義

$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ を列番号順に並び替えて $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ となったとすると, $q_1, \cdots, q_n$ は $1, \cdots, n$ を並べ替えたものだから

$$Q = (q_1, \cdots, q_n)$$

も順列となる。対応：$1 \mapsto p_1, \cdots\ n \mapsto p_n$ は対応：$q_1 \mapsto 1, \cdots\ q_n \mapsto n$ と同じものだから, 縦線を並べ替えることにより



としても横線の数は変わらないから

$$\varepsilon_P = \varepsilon_Q$$

行列式
行列式の定義

以上から

$$
\begin{aligned}
(\star)\ \text{の左辺} &= \sum_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}\, \varepsilon_P\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n \\
&= \sum_Q a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}\, \varepsilon_Q\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n
\end{aligned}
$$

であるから

n 次行列式の定義

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = \sum_Q \varepsilon_Q a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}
$$

ここで $\sum_P$ は P がすべての順列を亘るときの和