本日やること

1. 行列式
   - 組み合わせ乗積

行列式
組み合わせ乗積

[目標]
連立 1 次方程式を (行き当たりばったりでなく) 見通しよく解く方法として、

1. 消去法

とならんで重要なものとして

2. クラメルの公式

がある。これは連立 1 次方程式の「解の公式」のようなものである。

今回はこれを導くためにベクトルの組み合わせ乗積 (ウェッジ積) と言うものを使う。そこには行列式というものが現れるが, これは行列と並んで線形代数の重要な概念である。

行列式
組み合わせ乗積

(I) 未知数 2 個の場合

$$(1)\ \left\{\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \iff x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}$$

とおくと

$$(1) \ \Leftrightarrow \ (2) \quad x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

これを解いて x, y を求めたい。
そのために組み合わせ乗積（ウェッジ積）というものを使う。

行列式

組み合わせ乗積

組み合わせ乗積（ウェッジ積）の定義

2 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して, 以下の性質を満たす組み合わせ乗積（ウェッジ積） $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ というものを定義することができる。: 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ と実数 k に対して

(I) 結合法則 : $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$,

(II) 分配法則 : $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}$,

: $(k\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$

(III) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \quad \cdots (3)$

をみたす.

行列式

組み合わせ乗積

組み合わせ乗積（ウェッジ積）の注意

ただし

1. 交換法則 $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a})$ はみたさない。
2. (III) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ を代入すると $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}$ となるので

(IV) $\quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \cdots (4)$

となる

という大変異常な積である.

じつは $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ が通常の列ベクトルであると考えると, 結合法則, 分配法則と (3) を同時にみたすことはできない. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ は, 実数からはみ出した複素数のように, ベクトルの集合からはみ出した何かであると（取りあえず）考えてほしい. 少し難しい議論により, そういうものが（複素数を実数からはみださせて作ったように）作れることが分かっている.

行列式
組み合わせ乗積

[組み合わせ乗積の成分による表示]

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1,\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_2 \quad \text{とおくと} \quad \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2 \quad \text{だから乗積 } \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \text{ は}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\&=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

さらに (3), (4) を使うと

$$=a_1b_1\mathbf{0}+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+a_2b_1(-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)+a_2b_2\mathbf{0}$$

したがって

$$(5)\quad \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$$

行列式
組み合わせ乗積

2 次の行列式の定義

ここに現れる $a_1b_2 - a_2b_1$ を 2 次の行列式といい，記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ で表す．すなわち

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{6}$$

また，$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A$ と表すとき $|A|$，また列ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を用いて $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|$ とも書く．したがって

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \tag{7}$$

である．

行列式

組み合わせ乗積

[連立方程式 (2) の解法]
(2) の両辺に $\boldsymbol{b}$ を右から乗積すると

$$x\,\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} + y\,\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ だから

$$(5) \qquad x\,\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}$$

となり, y が消去できる. (7) より

$$x\,|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 = |\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$$

だから

$$x = \frac{|\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

行列式

組み合わせ乗積

同様にして y を求めよ。

行列式
組み合わせ乗積

(II) 3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくとき, 3 次の行列式 $|A|$ を定めよう.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_3$$

とおく. これらの乗積を

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i \quad (i, j \text{ は } 1, 2, 3 \text{ のどれか})$$

と定める.

行列式
組み合わせ乗積

行列 A の列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{a}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{a}_3 = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3$$

と表されるから

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 =$$
$$(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3) \wedge (a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3) \wedge (a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3)$$
$$\cdots (*)$$

これを展開すると $a_{i1}a_{j2}a_{k3}\,\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k$ の形の項が出てくる.

行列式

組み合わせ乗積

i, j, k の中に同じ番号があったら $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$ だから i, j, k がすべて異なる項のみ現れるので

$$\begin{aligned}(*) &= a_{11}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + a_{11}a_{23}a_{32}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 + a_{12}a_{21}a_{33}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + a_{13}a_{21}a_{32}\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + a_{13}a_{22}a_{31}\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1\end{aligned}$$

乗積の隣り合う 2 つの項の順番を入れ替えると符号が変わるので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ &= -\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 \\ &\quad = \bigl(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\bigr)\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

行列式
組み合わせ乗積

3 次の行列式

このことにより 3 次の行列式を

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

と定める．またこれを

$$|A| \quad \text{または} \quad |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|$$

と書くこともある．

$$(9)\quad \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,$$

である。

行列式
組み合わせ乗積

[連立方程式の解法]

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$

は

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ (これを } \boldsymbol{b} \text{ とおく.)}$$

と書けるので, 右から $\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3$ を乗積して

$$x\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 \quad \text{したがって} \quad x = \frac{|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|}$$

がえられる. y, z も同様である.