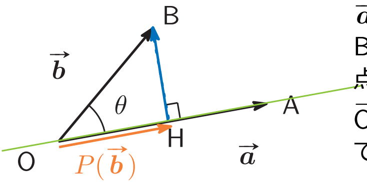
本日やること

- ベクトルの内積（やり直し）
- 空間のベクトル

ベクトル

内積（やり直し）

正射影



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影といい，$P(\vec{b})$ で表す。

$$\vec{h} = P(\vec{b}) \;\Leftrightarrow\; \vec{h} = t\vec{a} \text{ となる実数 } t \text{ があり，} \vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a} \quad \cdots(\star)$$

$\cos x$ の定義により数直線 OA での H の座標は $|\vec{b}|\cos\theta$. したがって

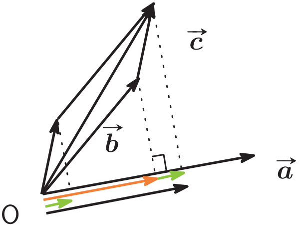
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = |\vec{b}|\cos\theta\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{だから} \quad t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta$$

また $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = t|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{h}$

ベクトル

内積（やり直し）

正射影の線形性



$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$

[確かめ] $\vec{h} = P(\vec{b}) = t\vec{a}$, $\vec{k} = P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$\vec{h}+\vec{k} = (t+s)\vec{a} \quad \cdots(\star\star)$,

また $\vec{b}-\vec{h} \perp \vec{a}$, $\vec{c}-\vec{k} \perp \vec{a}$ だから $(\vec{b}-\vec{h})+(\vec{c}-\vec{k}) \perp \vec{a}$ つまり

$(\vec{b}+\vec{c})-(\vec{h}+\vec{k}) \perp \vec{a}$

だから $(\star)$ より $P(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{h}+\vec{k}$

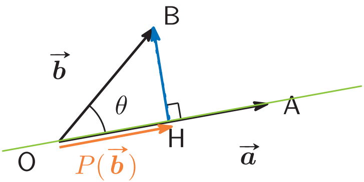
ベクトル

内積（やり直し）

内積の分配法則

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$$

[確かめ]



$P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると　$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

同様に $P(\vec{\boldsymbol{c}}) = s\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると　$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = s|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

$(\star\star)$ より $P(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = (t+s)\vec{\boldsymbol{a}}$ だから

$\quad \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = (t+s)|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

あわせて結論を得る。

ベクトル
内積

内積の性質

[I] : $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$

[II] : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

[III] : $(m\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (m\vec{b}) = m(\vec{a} \bullet \vec{b})$ (m はスカラー)

[VI] : $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (分配法則)

ベクトル

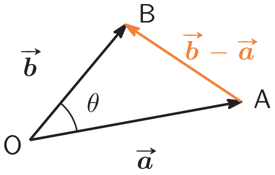
内積の成分表示

内積の成分表示

平面の場合　$\vec{a} = (a_1, a_2),\ \vec{b} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

空間の場合　$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

[確かめ]



内積の性質 [I], [II], [IV] を用いて

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

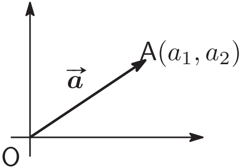
成分表示を用いて平面の場合は

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル

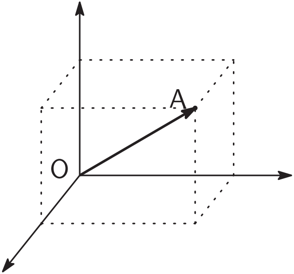
成分表示

ベクトルの成分表示の定義



[平面の場合] $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, A$(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2)$



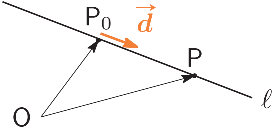
[空間の場合] $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, A$(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

と表す．これを $\vec{a}$ の成分表示という．

ベクトル

直線のパラメータ表示



点 P_0 を通り，ベクトル $\boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$ に平行な直線 ℓ 上の点 P は

$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\,\vec{d} \quad (t \in \mathbb{R})$$

のように表される。これを ℓ のパラメータ表示という。 $\vec{d}$ を方向ベクトルという。

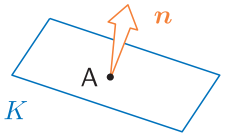
[方程式表示] P_0 の座標を (x_0, y_0, x_0)，P の座標を (x, y, z)，$\vec{d} = (a, b, c)$ とすると

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \qquad t \text{ を消去して} \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$a = 0$ のときは $x = x_0$ などとする。

ベクトル

平面の方程式



(i) 点 A(x_0, y_0, z_0) を通り, ベクトル

$$\boldsymbol{n} = (a, b, c)$$

と垂直な平面 K の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \cdots (\star)$$

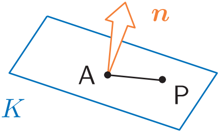
である.

$d = ax_0 + by_0 + cz_0$ とおくと

$$ax + by + cz = d \cdots (\star 2)$$

と変形される。

2 変数関数
平面と 1 次関数



[確かめ] (i) P(x, y, z) : K 上の A でない任意の点とする。

P は K 上にある. $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ldots (\star\star)$

である. また

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

であるから

$$\begin{aligned}(\star\star) &\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet (a, b, c) = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff (\star)\end{aligned}$$

だから K の方程式は $(\star)$ である.