

本日よりこと

① 行列

- 行列の積
- 転置行列
- 対称行列・交代行列

行列

復習：行列の積の定義

[行ベクトル × 列ベクトルの場合]

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(= \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)$$

次数が同じでないと定義できない
ベクトルの内積と同じである

行列

復習：行列の積の定義

復習：行列の積の定義

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mk} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{l1} & \vdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} \quad \left(= \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk} \right)$$

$$i = 1, \dots, l, \quad k = 1, \dots, n$$

で定める。

行列

行列の積

[行列の分割]

m 行 n 列の行列 A の第 i 行ベクトルを \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, m$), n 行 l 列の行列 B の第 j 列ベクトルを \mathbf{b}_k ($j = 1, \dots, l$) とするとき

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k & \cdots & \mathbf{b}_l \end{pmatrix}$$

と書くことがある。このとき

$$AB \text{ の } (ik) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_k$$

と書ける。

行列

行列の積

したがって

$$AB \text{ の第 } k \text{ 列} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_k \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \mathbf{b}_k \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \mathbf{b}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \mathbf{b}_k = A \mathbf{b}_k$$
$$AB = (A \mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad A \mathbf{b}_k \quad \cdots \quad A \mathbf{b}_l)$$

となる。

行列

行列の積

行列の積の演算法則

A, B, C : 行列, k : スカラー, 行列の積が定義されるとき

$$(I) \quad k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$(II) \quad (AB)C = A(BC)$$

$$(III) \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

[(II) の確かめ] $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{kl})$ とする。

$AB = (\alpha_{ik})$ とおくと $\alpha_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$ だから

$$(AB)C \text{ の } (il) \text{ 成分} = \sum_k \alpha_{ik}c_{kl} = \sum_k \left(\sum_j a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k,j} ((a_{ij}b_{jk})c_{kl})$$

行列

行列の積

一方 $BC = (\beta_{jl})$ とおくと $\beta_{jl} = \sum_k b_{jk}c_{kl}$ だから

$$A(BC) \text{ の } (il) \text{ 成分} = \sum_j a_{ij}\beta_{jl} = \sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk}c_{kl} \right) = \sum_{j,k} (a_{ij}(b_{jk}c_{kl}))$$

だから一致する。

[III] の確かめ] $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$ とする。

$B + C = (b_{jk} + c_{jk})$, だから

$$\begin{aligned} A(B + C) \text{ の } (ik) \text{ 成分} &= \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj} \\ &= \{AB \text{ の } (ij) \text{ 成分}\} + \{AC \text{ の } (ij) \text{ 成分}\} \end{aligned}$$

行列

行列の積

単位行列の性質

(i) $A : m \times n$ 行列, $E : n$ 次単位行列

$$\Rightarrow AE = A$$

(ii) $A : m \times n$ 行列, $E : m$ 次単位行列

$$\Rightarrow EA = A$$

[(i) の確かめ] 例で示す。

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \text{右辺}$$

(ii) も同様。

行列

行列の積

0 行列の性質

$$(i) \quad A + 0 = 0 + A = A$$

$$(ii) \quad A0 = 0, \quad 0A = 0$$

行列の演算の性質は実数の演算の性質によく似ている。ただし

$AB = BA$ とは限らない

$AB = 0$ でも、 $A = 0$ または $B = 0$ とは限らない

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

行列

転置行列

転置行列の定義

$m \times n$ 行列 A に対してその行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の**転置行列**といい tA で表す。

A の (i, j) 成分 = tA の (j, i) 成分
と言ってもよい。

行列

転置行列

転置行列の性質

A, B : 行列

$$(I) \quad {}^t({}^tA) = A$$

$$(II) \quad {}^t(kA) = k{}^tA$$

$$(III) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$$(IV) \quad {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

[(IV) の確かめ] 行列 X の (i, j) 成分を X_{ij} と書くことにする。 $({}^tX)_{ij} = X_{ji}$ だから

$$\begin{aligned} ({}^tB{}^tA)_{ij} &= \sum_k ({}^tB)_{ik} ({}^tA)_{kj} = \sum_k B_{ki} A_{jk} = \sum_k A_{jk} B_{ki} \\ &= (AB)_{ji} = ({}^t(AB))_{ij} \end{aligned}$$

行列

対称行列・交代行列

対称行列・交代行列の定義

正方行列 A が **対称行列** $\Leftrightarrow A = {}^tA \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

正方行列 A が **交代行列** $\Leftrightarrow A = -{}^tA \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$

例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

A : 正方行列 のとき $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列 $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列
だから正方行列は 対称行列 + 交代行列 の形に分解できる。