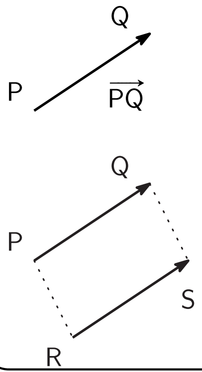
# 本日やること

1. ベクトル
    - ベクトルの定義
    - ベクトルの大きさ
    - ベクトルの和
    - ベクトルのスカラー倍
    - ベクトルの成分表示
2. 行列
    - 行列の定義
    - 行列の和・スカラー倍

# ベクトル

## ベクトル

### ベクトルの定義




図のような向きのついた線分を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し ベクトル PQ とよぶ

P : 始点

Q : 終点

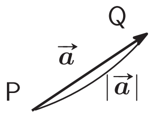
記号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ も用いる

ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考える。

# ベクトル

## ベクトルの大きさ・和

### ベクトルの大きさ



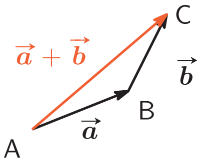

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

線分 PQ の長さのことを $\vec{a}$ の大きさと定め, $|\vec{a}|$ で表す。

# ベクトル

## ベクトルの和

### ベクトルの和の定義




$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

のとき**ベクトルの和**を

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

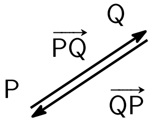
で定める。

# ベクトル

## ベクトルの和

[0 ベクトル] ： 始点と終点が一致したベクトルを 0 ベクトルといい $\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

[逆ベクトル]




$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の逆ベクトルと定め
$-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表す

[ベクトルの差] : $\vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{b}})$ を $\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$ と書くことにする

# ベクトル

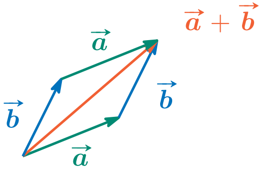
## ベクトルの和の性質

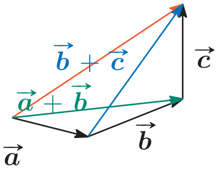
**ベクトルの和の性質**

[0] : $\vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\mathbf{0}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{a}}$,

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{a}}$ (交換法則)

[II] : $(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})+\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+(\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}})$ (結合法則)



# ベクトル

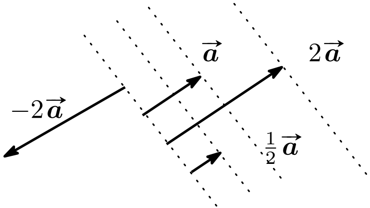
## ベクトルのスカラー倍

**ベクトルのスカラー倍の定義**

$m$ を実数 (スカラー), $\vec{a}$ をベクトル とするとき, スカラー倍を

$$m\vec{a} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{a}| \text{ で } \vec{a} \text{ と同じ向きのベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{0} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{a}| \text{ で } \vec{a} \text{ と反対向きのベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。



# ベクトル

## ベクトルのスカラー倍

### ベクトルのスカラー倍の性質

$m, n$ : 実数 (スカラー), $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ : ベクトル のとき

[III] : $m(n\vec{\boldsymbol{a}}) = (mn)\vec{\boldsymbol{a}}$,

[IV] : $(m+n)\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{a}} + n\vec{\boldsymbol{a}}$

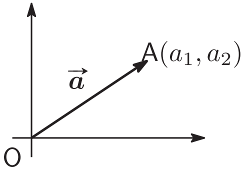
[V] : $m(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = m\vec{\boldsymbol{a}} + m\vec{\boldsymbol{b}}$

[VI] : $|m\vec{\boldsymbol{a}}| = |m||\vec{\boldsymbol{a}}|$

# ベクトル

## 成分表示

**ベクトルの成分表示の定義**




$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ　A の座標が $(a_1, a_2)$ のとき

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

と表す．これを $\vec{a}$ の成分表示という．

# ベクトル

## 成分表示

ベクトルの成分による計算

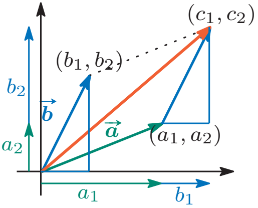
$\vec{a} = (a_1, a_2)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

[I] : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

[II] : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

[III] : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

[VI] : $m\vec{a} = (ma_1, ma_2)$　($m$ はスカラー)



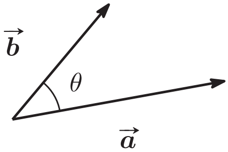

$\vec{a} + \vec{b} = (c_1, c_2)$ とすると

$c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$

# ベクトル

## 内積

### 内積の定義




$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき
内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

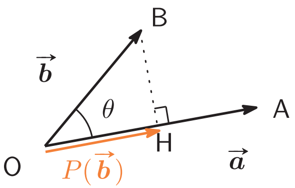
で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

# ベクトル

## 内積

### 正射影



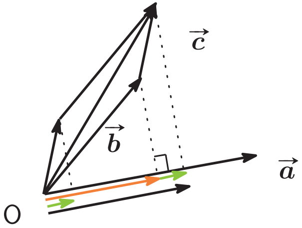

$\vec{a} =$ OA, $\vec{b} =$ OB とし，
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影**といい，$P(\vec{b})$ で表す。

$$\vec{h} = P(\vec{b}) \iff \vec{h} = t\vec{a} \text{ となる実数 } t \text{ があり，} \vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a} \quad \cdots (\star)$$

# ベクトル

## 内積

### 正射影の線形性




$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$

[確かめ]　$\vec{h} = P(\vec{b}) = t\vec{a}$, $\vec{k} = P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{h}+\vec{k} = (t+s)\vec{a} \quad \cdots (\star\star),$$

また $\vec{b}-\vec{h} \perp \vec{a}$, $\vec{c}-\vec{k} \perp \vec{a}$ だから

$$(\vec{b}+\vec{c}) - (\vec{h}+\vec{k}) \perp \vec{a}$$

だから $(\star)$ より $P(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{h}+\vec{k}$

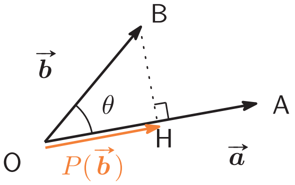
# ベクトル

## 内積

**内積の分配法則**

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$$

[確かめ]




$P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると $t = \dfrac{|\vec{\boldsymbol{b}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}\cos\theta$ だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

同様に $P(\vec{\boldsymbol{c}}) = s\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = s|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

$(\star\star)$ より $P(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = (t+s)\vec{\boldsymbol{a}}$ だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = (t+s)|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

あわせて結論を得る。

# ベクトル

## 内積

**内積の性質**

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

[II] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}}$

[III] : $(m\vec{\boldsymbol{a}}) \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (m\vec{\boldsymbol{b}}) = m(\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})$ ($m$ はスカラー)

[VI] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}}$ (分配法則)

# ベクトル

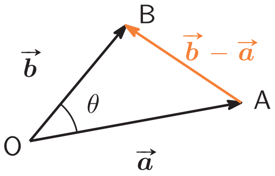
## 内積の成分表示

**内積の成分表示**

$$\vec{a} = (a_1, a_2),\ \ \vec{b} = (b_1, b_2)\ \Rightarrow\ \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

内積の性質 [I], [II], [IV] を用いて

[確かめ]




$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

成分表示を用いて

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

# 行列
## 行列の定義

### 行列の定義

行列 とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

のように数を長方形に並べたもの

成分 : 行列を作っている数

行 : 横に並んだ成分

列 : 縦に並んだ成分

# 行列
## 行列の定義

**行列の表示**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} :$$

$m$ 行 $n$ 列の行列,
または $m \times n$ 行列 という。

第 $i$ 行, 第 $j$ 列 の成分を $(i, j)$ 成分 といい $a_{ij}$ で表す。

$a_{ij}$

$i$, $j$ を添字 (suffix) という。
左の添字は行番号, 右の添字は列番号を表す。

# 行列
## 行列の定義

[例]

$(a_1 \cdots a_n)$ : $n$ 次行ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ : $n$ 次列ベクトル

も行列の一種と考える

### 行列の相等

「二つの行列 $A$, $B$ が等しい」というのは「$A$, $B$ の行の数列の数が一致し，さらに対応する成分同士が等しい」ことである。

# 行列
## 行列の定義

[特別な行列：$\boldsymbol{O}$ 行列]

すべての成分が 0 である行列

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{O}$ (ゼロ) 行列という。

# 行列

## 行列の定義

[特別な行列：正方行列]　行の数 $=$ 列の数 $= n$ である行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

を $n$ 次正方行列という。とくに対角成分以外すべて 0 であるとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : \ n \text{ 次対角行列}$$

さらに対角成分がすべて 1 であるとき

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} : \ n \text{ 次単位行列}$$ という　$\boldsymbol{E}$ で表す。

# 行列

## 行列の和・スカラー倍

**行列の和・スカラー倍の定義**

[和]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列どうしでないとたし算できない

[スカラー倍]

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \qquad k:\text{実数}$$

と定める。

ベクトルの和・スカラー倍と同じ考え方だから同じ性質を持つ

# 行列

## 行列の和の性質

**行列の和の性質**

[0] : $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, $\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,

[I] : $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (交換法則)

[II] : $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (結合法則)

[III] : $m(n\boldsymbol{A})=(mn)\boldsymbol{A}$,

[IV] : $(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$

[V] : $m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$