環境基礎線形代数学　演習問題 No.13 解答	学生番号		

1 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(step1)　固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ の解である.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(5-\lambda) - 2 \times (-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 2, 3$.

(step2)　$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ となるから　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 2x_1 \\ -3x_1 + 5x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x_1 = x_2$$

したがって $x_1 = c_1$ とおいて

$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　c_1は任意の数

検算する.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}$$

だから正しい.

(Step3)　$\lambda = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を求める

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{y}$ となるから $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_2 = 3y_1 \\ -3y_1 + 5y_2 = 3y_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ 2y_2 = 3y_1\ \Leftrightarrow y_2 = \frac{3}{2}y_1$

したがって $y_1 = c_2$ とおいて

$\boldsymbol{y} = c_2\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix} = \frac{c_2}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

または $c' = \frac{c_2}{2}$ とおいて

$= c_2'\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\quad c_2, c_2'$ は任意の数

検算する.

$A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2c_2'\\3c_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6c_2'\\9c_2'\end{pmatrix} = 3\boldsymbol{y}$

だから正しい.

2 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$ の解である.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \left|\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ -1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & -1+\lambda & -1\\ 1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$ 第 1 行を $(1-\lambda)$ 倍して引く
第 1 行をたす

$$= \begin{vmatrix}1 & -1+\lambda & -1\\ 0 & -1-(-1+\lambda)(1-\lambda) & 1-(-1)(1-\lambda)\\ 0 & -1+(-1+\lambda) & 3-\lambda+(-1)\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & -1+\lambda & -1\\ 0 & \lambda^2-2\lambda & -\lambda+2\\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & -1+\lambda & -1\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & -\lambda+2\\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2\end{vmatrix}$$

第 2 行, 第 3 行から $\lambda - 2$ をくくりだす。

$$= (\lambda-2)^2\begin{vmatrix}1 & -1+\lambda & -1\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

第 1 列で展開

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 1, 2$.

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ となるから $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

したがって $x_2 = c_1,\ x_3 = c_2$ とおくと $x_1 = -c_1 + c_2$ となるので

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \text{ は任意.}$$

検算する.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}$$

だから正しい.

(step3) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を求める

$A\boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{y}$ となるから $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow -y_1 + y_3 = 0, \quad -y_2 + y_3 = 0$

したがって $y_3 = c_3$ とおくと $y_1 = y_2 = c_3$ となるので

$\boldsymbol{y} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_3 \neq 0$ は任意.

検算する.

$$A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$$

だから正しい.