環境基礎線形代数学 演習問題 No.4 解答

1. 次の連立方程式を行列の基本変形を用いて解け.

$$(1)\quad \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -3x - 6y + 2z = -7 \end{cases} \cdots(\star)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 拡大係数行列を行基本変形することにより解を求める. 解は一つに決まるが途中の解法は何通りかあり得る。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 2 行と入れ替え} \\ \text{第 1 行と入れ替え} \\ \ \end{matrix}$$

(1, 1) 成分 を pivot にして第 1 列を掃き出す。

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ \\ \text{第 2 行から第 1 行の 2 倍をひく} \\ \text{第 3 行に第 1 行の 3 倍を加える} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2_{-1\times 2} & 3_{-1\times 2} & -5_{-(-1)\times 2} & 1_{-2\times 2} \\ -3_{+1\times 3} & -6_{+1\times 3} & 2_{+(-1)\times 3} & -7_{+2\times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2, 2) 成分 を pivot にして 第 2 列 を掃き出す

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 1 行から第 2 行を引く} \\ \ \\ \text{第 3 行に第 2 行を 3 倍して加える} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1_{-0} & 1_{-1} & -1_{-(-3)} & 2_{-(-3)} \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0_{+0\times 3} & -3_{+1\times 3} & -1_{+(-3)\times 3} & -1_{+(-3)\times 3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \text{第 3 行を } -10 \text{ で割る} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3, 3) 成分 を pivot にして 第 3 列 を掃き出す

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

第 1 行から第 3 行を 2 倍して引く
第 2 行に第 3 行を 3 倍して加える

$$
\to \begin{pmatrix} 1_{-0\times 2} & 0_{-0\times 2} & 2_{-1\times 2} & 5_{-1\times 2} \\ 0_{+0\times 3} & 1_{+0\times 3} & -3_{+1\times 3} & -3_{+1\times 3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

この変形 (行基本変形) によって連立方程式の解は変わらないから

$$
(\star) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 3 \\ y & = 0 \\ z & = 1 \end{cases}
$$

$$
(2) \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \cdots (\star\star)
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

第 2 行から第 1 行の 2 倍を引く
第 3 行から第 1 行を引く

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

第 1 行から第 2 行の 2 倍を引く
第 3 行から第 2 行を引く

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

第 1 行から第 3 行を引く

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

この変形 (行基本変形) によって連立方程式の解は変わらないから

$$
(\star\star) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -5 \\ y & = 3 \\ z & = -2 \end{cases}
$$