

環境基礎線形代数学演習問題 No.7 解答

1. 空間のベクトル $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$ に対して次のものを計算せよ。

(1) 大きさ

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

(2) 内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 2$$

(3) \vec{a} , \vec{b} のなす角を θ とするとき $\cos \theta$.

内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ より

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(4) 外積

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, 2, 1)$$

(5) \vec{a} , \vec{b} を 2 辺とする平行四辺形の面積 S .

$$|\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

だから

$$S = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta = \sqrt{14}$$

実はこれは $|\vec{a} \times \vec{b}|$ に等しい。

2. 次の行列の積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + (-1) \times (-1) & 2 \times 4 + (-1) \times 1 \\ 3 \times 2 + 5 \times (-1) & 3 \times 4 + 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (11)$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times 5 & 1 \times 1 + 2 \times 3 \\ 4 \times 4 + 3 \times 2 & 4 \times 1 + 3 \times 5 & 4 \times 1 + 3 \times 3 \\ 3 \times 4 + 1 \times 2 & 3 \times 1 + 1 \times 5 & 3 \times 1 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 7 \\ 22 & 19 & 13 \\ 14 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 3 & 4 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 1 \\ 2 \times 1 + 5 \times 4 + 3 \times 3 & 2 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 22 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列式の値を計算せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行} \times 2 \text{を引く} \\ \text{第1行} \times \frac{3}{2} \text{を引く} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2\{(-6) \times (-\frac{1}{2}) - 4 \times (-\frac{7}{2})\} = 34$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行を加える} \\ \text{第1行} \times 2 \text{を引く} \\ \text{第1行} \times 2 \text{を加える} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第3行と入れ替える} \\ \text{第1行と入れ替える} \end{array} = 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行を加える} \\ \text{第1行} \times 6 \text{を引く} \end{array}$$

$$= 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -24 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -24 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -(0 \times (-4) - 5 \times (-24)) = -120$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

第4列を左隣の列と3回入れ替えて

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

第4行を上隣の行と3回入れ替えて

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

[例題] を用いて

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第3行と入れ替え} \\ \text{第1行と入れ替え} \end{array} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行} \times 3 \text{を加える} \\ \text{第1行} \times 2 \text{を引く} \end{array}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times \begin{vmatrix} 14 & -7 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -2 \times \{14 \times 3 - (-6) \times (-7)\} = 0$$