環境基礎線形代数学 演習問題 No.5	学生番号		

1.

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{cases} \quad \text{は} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} \quad \text{とおくと}$$

$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ となる。組み合わせ乗積を用いて y を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の行列式で表せ。

$\boldsymbol{a}$ を両辺に左から乗積すると

$$\boldsymbol{a} \wedge (x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$$

分配法則が使えるから

$$x\,\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \vec{\boldsymbol{0}}$ だから x が消去されて

$$y\,\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$$

ところで (7) より

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,$$

したがって

$$y\,|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

$$y = \frac{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

2. (1) 次の行列式の値を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 3 \times (-1) = 38$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 7 \times 3 = -23$$

(2) 組み合わせ乗積を使って解け。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_2, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

とおくとスライド 10 ページと **1** により

$$x = \frac{|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{7 \times 5 - 3 \times (-1)}{2 \times 5 - 3 \times 3} = 38$$

$$y = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times (-1) - 7 \times 3}{2 \times 5 - 3 \times 3} = -23$$

がわかる.

これが後述するクラメルの解法である.

3. (1) 次の行列式の値を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times2\times0+0\times1\times1+0\times(-1)\times2-1\times2\times2-0\times0\times0-1\times1\times(-1) = -3$$

(2) 組み合わせ乗積を使って解け。

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad + z = 3 \\ \quad\quad 2y - z = -4 \\ 2x + y \quad\quad\quad = 0 \end{cases}$$

は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_3, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

とおくと

$$⑦ \quad x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

と変形できる.

両辺に右から $\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3$ を乗積すると

$$x\,\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 + y\,\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 + z\,\boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3$$

であるが

$$\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_2 = -(\boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{a}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}$$

だから

$$x\,\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3$$

となる。ところで

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3 = |\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$$

だから

$$x = \frac{|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

同様に⑦の両辺に左から $\boldsymbol{a}_1$, 右から $\boldsymbol{a}_3$ を乗積して

$$y = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|} = -\frac{2}{3}$$

⑦の両辺に左から $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$ を乗積して

$$z = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|} = \frac{8}{3}$$