本日やること

1. ベクトル
   - ベクトルの平行・垂直
   - 直線・線分のベクトルによる表示
   - 三角形の表示
   - 空間のベクトル

ベクトル
ベクトルの平行・垂直

ベクトルの平行条件・垂直条件

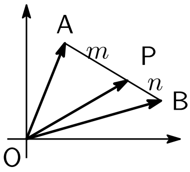
$\vec{\boldsymbol{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\boldsymbol{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ のとき

$\vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{b}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ となるスカラー m がある

$\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = 0$

ベクトル
内分点のベクトル表示

[内分点のベクトル表示]



P : AB を $m : n$ $(m > 0, n > 0)$ に内分する点

$$\Rightarrow \vec{\mathsf{P}} = \frac{n\overrightarrow{\mathsf{OA}} + m\overrightarrow{\mathsf{OB}}}{m+n}$$

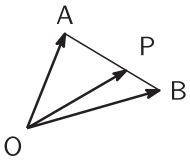
とくに P が AB の中点

$$\Rightarrow \vec{\mathsf{P}} = \frac{\overrightarrow{\mathsf{OA}} + \overrightarrow{\mathsf{OB}}}{2}$$

ベクトル

直線・線分のベクトルによる表示

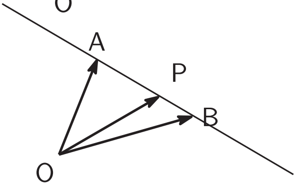
線分・直線のベクトルによる表示（パラメータ表示）



O : 原点とするとき

[1] 点 P が線分 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$



[2] 点 P が直線 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad t \text{ は実数}$$

[考え方] $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるが

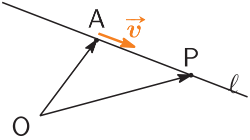
P が直線 AB 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left(= t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \right)$

だから代入して整理。

ベクトル

直線・線分のベクトルによる表示

線分・直線のベクトルによる表示（パラメータ表示）



[3]　ℓ は点 A を通りベクトル $\vec{v}$ に平行な直線

P : ℓ 上の任意の点

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{v} \qquad \cdots (\star)$$

$\vec{v}$ を ℓ の方向ベクトルという

t を パラメータという

P(x, y),　A(x_0, y_0)　$\vec{v} = (v_1, v_2)$ とすると

$$(\star) \iff \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

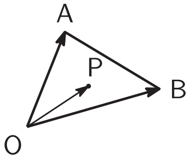
t を消去すると $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ のとき

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

ベクトル

三角形の表示

三角形のベクトルによる表示



△OAB において

[1] 点 P が辺 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s = 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0$$

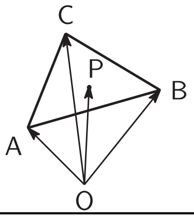
[2] 点 P が △OAB の境界を含む内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s \leqq 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0$$

ベクトル

三角形の表示

三角形のベクトルによる表示



O を原点とする．△ABC において

[3]　点 P が △ABC の境界を含む内部にある

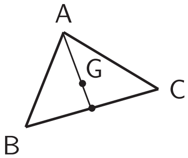
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$

$$t + s + r = 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ r \geqq 0$$

ベクトル

三角形の表示

[例題]



O を原点とする．△ABC において $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ となる点 G をとる。直線 AG は辺 BC を 2 等分することを示せ。

[解]

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right)$$

BC の中点を L とすると $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AL}}$$

ベクトル

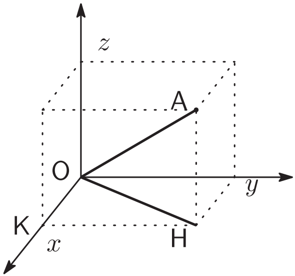
空間のベクトル

空間のベクトルも平面の場合と全く同じに定義される。

和・スカラー倍・内積も同様に定義される。

状況が変わるのは成分表示に関する部分。

ベクトル
空間のベクトル



[空間の直角座標]

P $\leftrightarrow$ (x, y, z)

[空間の点の距離]

(i) O と A(x, y, z) の距離

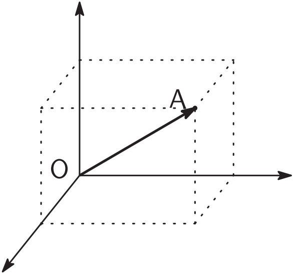
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(ii) 2 点 P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2) の距離

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ベクトル

空間のベクトルの成分表示



[空間のベクトルの成分表示]

$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$

と表す.

ベクトル

空間のベクトルの成分表示

ベクトルの成分による計算 (空間の場合)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

[I] : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

[II] : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

[III] : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

[VI] : $m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$　(m はスカラー)

[V] : $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$