

本日やること

① ベクトル

- スカラー量・ベクトル量
- ベクトルの定義
- ベクトルの大きさ
- ベクトルの和
- ベクトルのスカラー倍
- ベクトルの成分表示
- 2点を結ぶベクトル
- 内積

ベクトル

スカラー量・ベクトル量

何のためにベクトルを使うか。

1. 図形の研究
2. 力学・工学のための数学的道具

[スカラー量] : 実数で表される量

例 : 長さ, 時間, 質量, 温度, 電荷, 電位, ...

[物理量] =

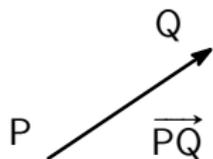
[ベクトル量] : 大きさと向きを持つ量

例 : 速度, 加速度, 力, ...

ベクトル

ベクトル

ベクトルの定義

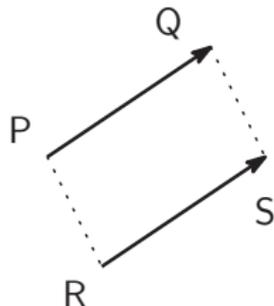


図のような向きのついた線分を \vec{PQ} で表し **ベクトル PQ** とよぶ

P : 始点

Q : 終点

記号 \vec{a}, \vec{b}, \dots も用いる

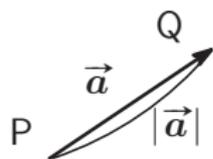


ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考ええる。

ベクトル

ベクトルの大きさ・和

ベクトルの大きさ



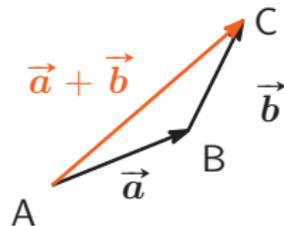
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ のとき

線分 PQ の長さのことを \vec{a} の **大きさ** と定め、 $|\vec{a}|$ で表す。

ベクトル

ベクトルの和

ベクトルの和の定義



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

のときベクトルの和を

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

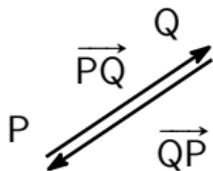
で定める。

ベクトル

ベクトルの和

[0 ベクトル] : 始点と終点一致したベクトルを **0 ベクトル** といい $\vec{0}$ で表す。

[逆ベクトル]



\vec{QP} を \vec{PQ} の **逆ベクトル** と定め
 $-\vec{PQ}$ で表す

[ベクトルの差] : $\vec{a} + (-\vec{b})$ を $\vec{a} - \vec{b}$ と書くことにする

ベクトル

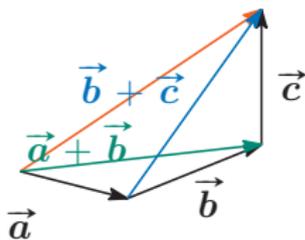
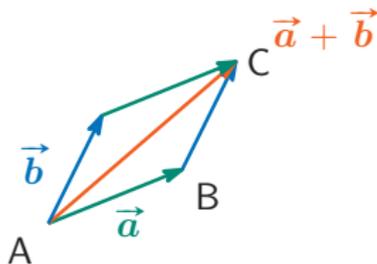
ベクトルの和の性質

ベクトルの和の性質

$$[0] : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a},$$

$$[I] : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{交換法則})$$

$$[II] : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{結合法則})$$



ベクトル

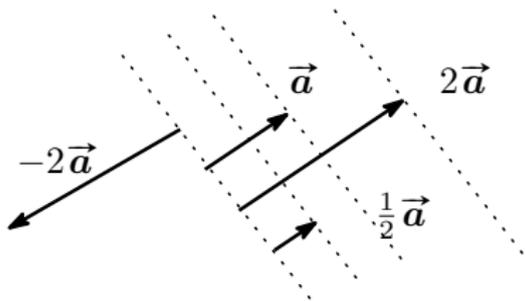
ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の定義

m : 実数 (スカラー), \vec{a} : ベクトル とするとき, **スカラー倍**を

$$m\vec{a} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{a}| \text{ で } \vec{a} \text{ と同じ向き of ベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{0} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{a}| \text{ で } \vec{a} \text{ と反対向き of ベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。



ベクトル

ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の性質

m, n : 実数 (スカラー), \vec{a}, \vec{b} : ベクトル のとき

$$[\text{III}] : m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a},$$

$$[\text{IV}] : (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

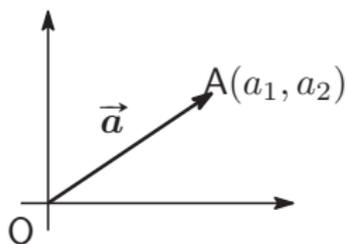
$$[\text{V}] : m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$[\text{VI}] : |m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$$

ベクトル

成分表示

ベクトルの成分表示の定義



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

と表す. これを a の成分表示という.

ベクトル

成分表示

ベクトルの成分による計算

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき}$$

$$[I] : \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

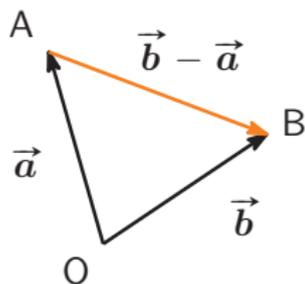
$$[II] : |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$[III] : \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$[VI] : m\vec{a} = (ma_1, ma_2) \quad (m \text{ はスカラー})$$

ベクトル

2点を結ぶベクトル



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ のとき

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

A の座標 (a_1, a_2) , B の座標 (b_1, b_2) のとき

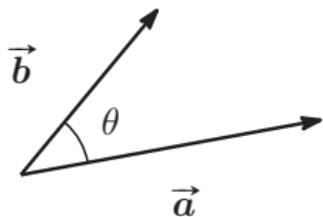
$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ だから

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

ベクトル

内積

内積の定義



\vec{a} , \vec{b} のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき
内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, & (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外 のとき}) \end{cases}$$

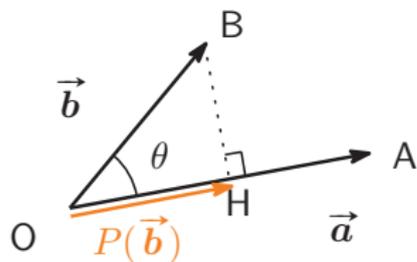
で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

ベクトル

内積

正射影



$\vec{a} = OA, \vec{b} = OB$ とし,
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交
点を H とする。

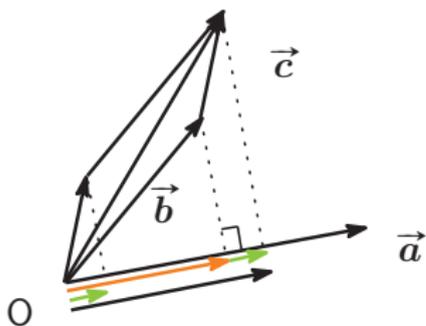
\overrightarrow{OH} を \vec{b} の \vec{a} への正射影といい, $P(\vec{b})$
で表す。

$$\vec{h} = P(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{h} = t\vec{a} \text{ となる実数 } t \text{ があり, } \vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a} \quad \dots (*)$$

ベクトル

内積

正射影の線形性



$$P(\vec{b} + \vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$

[確かめ] $\vec{h} = P(\vec{b}) = t\vec{a}$, $\vec{k} = P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{h} + \vec{k} = (t + s)\vec{a} \quad \cdots (**),$$

また $\vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{k} \perp \vec{a}$ だから

$$(\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{h} + \vec{k}) \perp \vec{a}$$

だから (*) より $P(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{h} + \vec{k}$

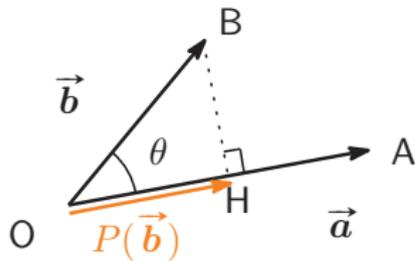
ベクトル

内積

内積の分配法則

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

[確かめ]



$P(\vec{b}) = t\vec{a}$ とすると $t = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cos \theta$ だから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t|\vec{a}|^2$$

同様に $P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = s|\vec{a}|^2$$

(**) より $P(\vec{b} + \vec{c}) = (t + s)\vec{a}$ だから

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (t + s)|\vec{a}|^2$$

あわせて結論を得る。

ベクトル

内積

内積の性質

$$[I] : \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$[II] : \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$[III] : (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (m \text{ はスカラー})$$

$$[VI] : \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{分配法則})$$

ベクトル

内積の成分表示

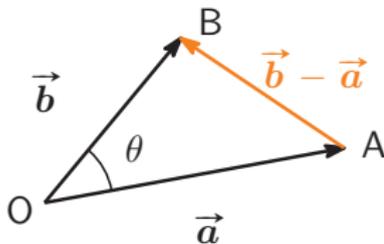
内積の成分表示

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

内積の性質 [I], [II], [IV] を用いて

[確かめ]

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$



したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

成分表示を用いて

$$= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$